

KONTINUUMMAL MODELLEZHETŐ SZERKEZETEK FREKVENCIAANALÍZISE

PhD értekezés

Huszár Zsolt Dr. univ.

*okl. építőmérnök, matematikus szakmérnök,
informatikai szakmérnök*

Budapest, 2009. június

A DOKTORI ÉRTEKEZÉS TÉMAKÖREI

A gyakorló építőmérnök munkája során számos esetben találkozok dinamikai problémával, vagy olyan feladatokkal, melyek megoldásához a dinamika eszköztárának elemeit célszerű használni. Ilyen területek – a teljesség igénye nélkül – az alábbiak.

A dinamika egyik intenzíven kutatott részterülete az épületek vasbeton- és acélváz-szerkezeteinek viselkedése földrengésteher hatására. Az elért eredményekre támaszkodva folyamatosan fejlesztik a tervezési módszereket és szabályzatokat. Fontos részterület az olyan szerkezetek vizsgálata is, melyek funkciójából következik a használat-közbeni dinamikus igénybevétel. Ide tartoznak a különböző ipari épületek azon szerkezetei, melyeket gépi berendezések keltette dinamikus hatás terhel, valamint középületek nagyméretű födém szerkezetei (pl. tornaterem, táncterem), melyeken embertömeg szinkronizált mozgása kelt dinamikus hatást. Hidakon a forgalomból származik dinamikus hatás.

Közvetett módon felhasználhatók a dinamika eredményei a szerkezetek roncsolásmentes vizsgálatában is. Ennek egyik fontos területe a hidak, hídgerendák állapotvizsgálata, az esetleges repedezettségének földerítése.

A Zürichi ETH szakmérnök-képzése keretében a dinamika területén szerzett ismereteim indítottak arra, hogy különböző szerkezetek rezgésvizsgálatával foglalkozzam.

A kontinuum módszer alkalmazásával vizsgáltam a berepedt vasbetongerendák és feszített betongerendák, változó merevségű konzolrudak, megoszló normálerővel terhelt befogott oszlopok, lapos forgásparaboloid-héj rezgéseit, továbbá vékonyfalú U-szelvények hajlító- és csavaró lengéseit.

Disszertációmban a fentiek közül a dinamika két elméleti szempontból általam különösen érdekesnek talált részterületével foglalkozom:

1. Forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata

2. Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgéseinek numerikus és kísérleti vizsgálata

Egy új analitikus eljárást alkalmaztam a forgásparaboloid-héj sajátrezgéseit leíró differenciálegyenlet-rendszerének megoldásánál. Az ebből előállított frekvenciaegyenlet alkalmas a héj valamennyi sajátfrekvenciájának és rezgési alakjának meghatározására. Az elméleti eredményeket felhasználva, egy úrszerkezetként alkalmazható tányérantenna rezgési jellemzőit számítottam.

A kéttámaszú vasbetongerendáknál azt vizsgáltam, hogy a repedések lélegzése – megnyílása és bezáródása – hogyan befolyásolja a rezgési jellemzőket. A berepedt gerendák laboratóriumi dinamikai mérései során a spektrumban az első frekvencia helyénél jelentkező kettős csúcs jelenlétét numerikus szimulációval igazoltam és magyarázatot adtam a jelenségre. A berepedt gerendák sajátfrekvenciáinak meghatározására új lineáris modelleket állítottam elő, melyek kombinációjával a bonyolultabb nem lineáris megoldások jó közelítéssel kiválthatók. Berepedt feszített tartóra hatásos feszítőerő-sajátkörfrekvencia diagramot készítettem. Feszített hidak esetén az ilyen diagrammok más vizsgálatokkal kiegészítve, felhasználhatók az állapotváltozás vizsgálatánál.

TARTALOMJEGYZÉK

1. Forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata

Jelölések

1.1. Bevezetés

1.1.1. Célkitűzések

1.1.2. Szakirodalmi áttekintés

1.2. Hajlított lapos héjak alapegyenlete

1.3. Forgásparaboloid-héj sajátrezgései nyírási alakváltozások nélkül

1.3.1. Alapfeltételezések

1.3.2. A forgásparaboloid-héj differenciálegyenlet-rendszere és peremfeltételei

1.3.3. Speciális esetek vizsgálata

1.3.3.1. A szabad peremű ágyazatlan körlemez rezgésvizsgálata

1.3.3.2. A szabad peremű rugalmasan ágyazott körlemez rezgésvizsgálata

1.3.3.3. A forgásparaboloid-héj nyúlásmentes alakváltozásai

1.3.4. A forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata differenciálegyenlet-rendszer sajátérték-feladatként

1.3.4.1. A feszültségfüggvény kiküszöbölhetőségének vizsgálata

1.3.4.2. A képzőfüggvény bevezetése

1.3.4.3. A karakterisztikus differenciálegyenlet megoldása

1.3.4.4. A frekvenciaegyenlet és a rezgési elmozdulási alakok

1.3.5. Mintapéldák

1.3.5.1. Forgásparaboloid-héj sajátfrekvenciái és rezgési elmozdulásai

1.3.5.2. Forgásparaboloid-héj és a szabad peremű ágyazatlan körlemez

1.3.5.3. Forgásparaboloid-héj és a rugalmasan ágyazott körlemez

1.3.5.4. Az összehasonlításokból levonható következtetések

1.3.5.5. A geometriai jellemzők hatása a forgásparaboloid-héj rezgéseire

1.4. Forgásparaboloid-héj sajátrezgései a nyírási alakváltozások figyelembevételével

1.4.1. A nyírási alakváltozás alapösszefüggései

1.4.2. A képzőfüggvényes módszer alkalmazása

1.4.3. Mintapélda a nyírási alakváltozás figyelembevételével

1.5. Függelék

2. Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgéseinek numerikus és kísérleti vizsgálata

Jelölések

2.1. Bevezetés

2.1.1. Célkitűzések

2.1.2. Szakirodalmi áttekintés

2.1.2.1. Sajátfrekvenciák megváltozásán alapuló módszerek

2.1.2.2. Csillapítás megváltozásán alapuló módszerek

2.1.2.3. Rezgési alakok megváltozásán alapuló módszerek

2.1.2.4. Modális görbületváltozáson alapuló módszerek

2.1.2.5. Hajlékonysági mátrix megváltozásán alapuló módszerek

2.1.2.6. Számítási modell módosítása

2.1.2.7 Egyéb módszerek

2.2. Az alkalmazott számítási módszerek

2.2.1. A rezgés differenciálegyenlete és az elemi számítás

2.2.2. A többszabadságfokú rendszer

2.2.3. Az alkalmazott differenciamódszer

2.2.4. Nemlineáris rezgésszámítás

2.2.4.1. Időlépéses algoritmusok

2.2.4.2. Folytonos és diszkrét Fourier-transzformáció

2.2.4.3. A felbontás javításának lehetőségei

2.2.4.4. Az idősor egy szeletének vizsgálata

2.3. Nemfeszített vasbetongerenda rezgésvizsgálata

2.3.1. Kísérletek és numerikus vizsgálatok

2.3.1.1. Laboratóriumi kísérletek

2.3.1.2. A gerenda lineáris frekvenciaszámítása

2.3.1.3. Nemlineáris vizsgálat az önsúly okozta repedés-megnyílás elhanyagolásával

2.3.1.4. Nemlineáris vizsgálat az önsúly okozta repedés-megnyílás figyelembevételével

2.3.1.5. Numerikus szimulációk változó csillapítás és indító impulzus mellett

2.3.1.6. A látszólagos sajátfrekvencia, mint az idő függvénye

2.3.2. Lineáris modellek

2.3.2.1. Első sajátfrekvencia közelítése egyszabadságfokú modellel

2.3.2.2. Második sajátfrekvencia közelítése

2.3.3. A kísérleti eredmények és a numerikus szimulációk összehasonlítása

2.4. Feszített vasbetongerenda rezgésszámítása

2.4.1. A repedezett szakaszon értelmezhető hajlítómerevség

2.4.2. Alapfeltevések, lineáris és nemlineáris számítási modell

2.4.3. Mintapélda

2.4.3.1. Lineáris és nemlineáris rezgésszámítás

2.4.3.2. Sajátkörfrekvenciák lineáris számítása változó feszítőerő mellett

2.4.4. Megállapítások

3. Összefoglalás 1-2

4. Az értekezés tézisei, a tézispontokhoz kapcsolódó tudományos közlemények

5. Irodalom

1. Forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata

JELÖLÉSEK

z	függőleges koordináta, hengerkoordináta rendszer,
r	sugárirányú koordináta, hengerkoordináta rendszer,
ϑ	szög koordináta, hengerkoordináta rendszer,
τ	az idő független változója ,
w	a normális irányú eltolódás függvénye,
F	a membránerők feszültségfüggvénye,
R	a forgásparaboloidhoz a tetőpontjában simuló gömb sugara,
a	a héj permkörének sugara,
t	a héj vastagsága,
E	a héj rugalmassági modulusa,
G	a héj nyírási modulusa,
ρ	a héj anyagának sűrűsége,
ν	Poisson-tényező,
c	hang terjedési sebessége a héjban,
C	ágyazási tényező,
K	hajlítási merevség,
K_0	globális hajlítási merevség,
K_L	lokális hajlítási merevség,
S	a héj nyírási merevsége,
l_{stat}	statikus karakterisztikus hossz,
l_ω, l_k	lengési karakterisztikus hosszak,
ξ	relatív sugárirányú koordináta,
α	rezgési sajátérték,
k	gyűrűirányú hullámszám,
ℓ	gyűrűirányú csomóvonalszám,
$\omega_{k,\ell}$	sajátkörfrekvencia a k, ℓ módusban,
$f_{k,\ell}$	sajátfrekvencia a k, ℓ módusban,
N_r	radiális membránerő,
$N_{r,\vartheta}$	csúsztatóerő,
M_r	radiális hajlítónyomaték,
$M_{r,\vartheta}$	csavarónyomaték,
Q_r	nyíróerő,
p	felületi teher,
p_{memb}	membránhatással egyensúlyozott felületi teher,
p_{lem}	lemezhatással egyensúlyozott felületi teher,
H	képzőfüggvény,
Θ	operátormátrix,
$\phi_{k,\ell}$	rezgési elmozdulási alakfüggvény,
g	Gauss-féle szorzatgörbület
$N_x,$	x irányú metszeterő,
$N_y,$	x irányú metszeterő,
N_{xy}	csúsztató metszeterő.

1.1. BEVEZETÉS

Az utóbbi évtizedekben számos héjszerkezet épült. Az építőipar mellett a gépészetben és a híradástechnikában is készítenek héjként kialakított szerkezeti elemeket. A tervező mérnök munkájánál nagy segítséget jelent, hogy rendelkezésre állnak az évtizedes fejlesztéssel elkészített gépi programok (Ansys, Cosmos, Lusas stb.). Ezek mechanikus alkalmazásánál a tervezőnek nincs szüksége a statikai, vagy a dinamikai probléma matematikai háttérének ismeretére, ez viszont az elemző készséget csorbítja.

A kutató mérnök érdeklődése ezzel szemben a héjszerkezetek matematikai vizsgálatára irányul. Keresi a lehetőséget egzakt, vagy legalábbis, a minél kevesebb egyszerűsítő feltevéssel élő analitikus (vagy szemi-analitikus) számítási módszerek kidolgozására. A probléma általában az, hogy az egyes szerkezetek dinamikai viselkedését leíró differenciálegyenlet-rendszer bonyolult, ezért megoldásuk általában körülményes. A kutató feladata ilyenkor megtalálni azt az eljárást, amellyel a szerkezet viselkedéséről kvalitatív, és kvantitatív leírást adhat.

Doktori értekezésem 1. fejezetében a lapos, szabad peremű forgásparaboloid-héj sajátrezgéseinek vizsgálatával foglalkozom. A rezgést leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldásánál egy új típusú eljárást alkalmaztam. Úgynevezett képzőfüggvény bevezetésével sikerült a problémát egy közönséges nyolcadrendű differenciálegyenletre redukálni. Ez már alkalmas volt a frekvenciaegyenlet előállítására, melynek megoldása után a körfrekvenciák és rezgési alakok meghatározhatók voltak.

1.1.1 Célkitűzések

Értekezésem célkitűzései az alábbiak:

- Új analitikus eljárás kidolgozása a lapos forgásparaboloid- ill. gömbsüveghéjak rezgéseit leíró differenciálegyenlet-rendszer megoldására:
 - nyírási alakváltozások nélkül,
 - nyírási alakváltozások figyelembevételével.
- A frekvenciaegyenlet előállítása a sajátfrekvenciák és a rezgési alakok meghatározása.
- Számítási algoritmus és program kidolgozása (MATLAB).
- Az analitikus számítás eredményeinek ellenőrzése alternatív számítási eljárással, az ANSYS végelem programmal.
- Szabadon lebegő tányérantenna (mint úrszerkezet) sajátrezgéseinek számítása.
- A forgásparaboloid-héj, az ágyazatlan és a rugalmasan ágyazott körlemez rezgési jellemzőinek analitikus és numerikus összehasonlítása.

1.1.2. Szakirodalmi áttekintés

A forgáshéjak szakirodalmának nagyobb része, a gyakoribb alkalmazás miatt, a körhenger héjakkal kapcsolatos. Valamivel kisebb az érdeklődés az egyéb forgáshéjak, mint például a gömbsüveg, illetve a forgáshiperboloidok iránt. A laposhéjak, illetve gömbsüveghéjak irodalma elsősorban a héjak statikai viselkedését és ezen belül is stabilitásvesztés kérdését tárgyalja részletesebben. Viszonylagosan kevesebb irodalma van a forgáshéjak rezgésvizsgálatának.

A héjszerkezetek rezgésvizsgálata során számos nehézség jelentkezik az egyszerűbb geometriájú szerkezetekhez, a gerendákhoz és a lemezekhez képest. *Blevins (1984)* az

alábbiakat említi. Általában a héjak is rendelkeznek mindazon tulajdonságokkal, melyekkel a lemezek és a gerendák is, de ezen túlmenően lényeges jellemzőjük, hogy legtöbbször a nyúlások és a nyomatékok nem választhatók el egymástól (kapcsolt egyenletek). A héjak hajlítórezgéseit leíró differenciálegyenlet nyolcadrendű, míg a gerendák és a lemezek hajlítórezgéseinek problémája negyedrendű differenciálegyenletekre vezet. A héjszerkezetekre felállított egyenletek nagyon különböző rezgési alakokat eredményeznek. Pl. körhengerhéjak rezgésvizsgálatából megkapjuk a csőszerű rudak tranzverzális és longitudinális rezgéseit, csavaró lengéseit, továbbá származtathatók a gyűrűk síkbeli hajlítórezgései és síkbeli tágulási rezgései is.

Touzé és társai (2008) geometriai imperfekciók és a viszkózus csillapítás hatását vizsgálták szabad peremű kör és gömbsüveg héjak rezgéseivel kapcsolatban. A rezgés nem-lineáris jellegét, mint egyfajta felkeményedést illetve lágyulást tekintették. A Kármán-féle nagy lehajlások elméletét alkalmazták a kontinuum modellben. Az alakhibától mentes körlemez nagy amplitúdójú rezgéseinél a nyúlás-eltolódás kapcsolatot Kármán-féle összefüggés segítségével írták le (pl.: *Efstathiades (1971)*). A geometriai imperfekciókat, melyek valóságos szerkezeteknél elkerülhetetlenek, úgy vették figyelembe, hogy egy kezdeti statikus lehajlásrendszer adtak a dinamikus számított lehajlásokhoz. Egyaránt vizsgálták szimmetrikus és aszimmetrikus imperfekcióknak a móduszokra gyakorolt hatását. Végeztek olyan vizsgálatokat is, amikor az imperfekciók alakfüggvényét ideális körlemez rezgési alakjainak megfelelően vették fel, vizsgálva az átmenetet a felkeményedés és a lágyulás között. Ha csillapítást is figyelembe vettek a lágyulási viselkedés vált erőteljesebbé, de hatása korlátozott maradt.

Dehaven és társai (2006) körhenger-szegmensek szabad rezgéseit vizsgálták, a szegmensek nyílásszöge 30° , 90° , 150° volt. A móduszok közül a hosszirányú hajlítórezgések játszották a döntő szerepet. A kísérlet célja, a számított modális jellemzőkkel való összehasonlításon túl, a héjpanelekre felhordott piezoelektromos érzékelők vizsgálata volt, melyeket a repülőgépiparban hasznosítanak az aktív rezgésmérséklés területén.

Kabir (2002) lapos, vékony, négyszögalaprajzú hengerhéj panel szabad rezgéseit vizsgálta. A héj kompozit anyagú, tetszőleges irányban futó szálerősítéssel. Az egyenletek felírásához a vékony héjakra vonatkozó Reissner elméletet használta kis elmozdulások mellett, a klasszikus Kirchhoff-Love hipotézis szerint. A héj panel szabad megtámasztású. A megoldáshoz folytonos és nem-folytonos kettős Fourier-sorokat használt. A megoldási módszer hatékonyságát parametrikus vizsgálattal elemezte. Az eredményeket végeeselemes számítások eredményeivel hasonlította össze.

Shang (2001) két félgömb- és hengerhéjból összetett kapszula sajátfrekvenciáit és rezgési alakjait határozta meg. A vékony héjak klasszikus Love-féle elméletét (*Love (1927)*) alkalmazta. A félgömb- és a hengerhéj csatlakoztatásánál az alakváltozásokat folytonosan illesztette. A sajátfrekvenciákat a szokásos módon sajátérték-feladatból kapta.

Godoy és De Souza (1998) vékony vasbeton héjszerkezet kizsaluzásával gerjesztett rezgéseket vizsgálták lineáris elmélet segítségével. A móduszokat kettős Fourier-sor formájában állították elő. Csak az önsúly hirtelen megjelenésének hatását vizsgálták, és nem foglalkoztak a szerkezet viszko-elasztikus tulajdonságából adódó késleltetett hatásokkal. (Ez utóbbira példa *Ballestros (1978)*).

Taeprasartsit és Tao (2005) magas gömbsüveg-héj dinamikus stabilitását vizsgálták. Az egyenletesen megoszló teher bekapcsolás jelleggel működött a héjon. A számításokat az ANSYS program segítségével végezték. A kritikus terhet a geometriai jellemzőkből konstruált dimenziótlan paraméter függvényében határozták meg.

Garg és társai (2006) kétszer görbült rétegelt kompozit- és szendvicshéjak szabad rezgéseit vizsgálták. A nyírési alakváltozásokat magasabbrendű elmélettel közelítették, melyben felhasználták *Sanders (1959)* elméletét. Megoldást adtak a középfelületre merőleges

összenyomódás figyelembevételével is és ennek elhanyagolásával is. A mozgásegyenleteket a Hamilton elv felhasználásával vezették le. Az elmozdulásmezőket zárt alakban állítottak elő Descartes koordinátarendszerben kettős Fourier-sorok formájában.

Thurston (1961) külső nyomással terhelt, befogott lapos gömbsüveg-héj tengelyszimmetrikus hajlítását modellezte. A numerikus vizsgálatokból – az alakhiba nélküli héjszerkezetekre – kapott eredmények nem mutattak összhangot a kísérleti eredményekkel.

Néhány publikáció lapos gömbsüveg-héjak átpattanásával foglalkozik. Ezek között úttörő munkának számít *Budiansky és Roth (1962)* akik összefüggést adtak a kritikus átpattanási teher számítására.

Nie (2001) alakhiba feltételezésével végzett horpadás vizsgálatot rugalmasan ágyazott, lapos gömbsüveghéjén perturbációs módszerrel. A rugalmas ágyazás Winkler típusú volt.

Reddy (2004) monográfiája összefoglalást ad a kompozit héjak különböző statikai és dinamikai számítási módszereiről. Az ismertetés kiterjed az analitikus és a végeleemes módszerekre. Az új kiadás tartalmaz egy fejezetet, mely speciális anyagokból készült szerkezetekkel foglalkozik. *Benaroya (2005)* könyve részletesen összefoglalja a mérnöki szerkezetek rezgésszámításának módszereit, foglalkozik modellezési technikák bizonytalanságaival.

A szendvics- és kompozit héjakkal kapcsolatos hazai kutatások területén elsősorban Hegedűs István és Kollár László neve említendő (pl.: *Hegedűs (1979, Kollár (1991, 1993))*).

1.2. HAJLÍTOTT LAPOS HÉJAK ALAPEGYENLETE

A felület lapos voltából adódó egyszerűsítési lehetőségek felhasználásával a lapos héjak differenciálegyenlet-rendszere (*Hegedűs (2000)*):

$$-P(z, F) + K\Delta\Delta w = p_z, \quad (1.2.1a)$$

$$\frac{1}{Et}\Delta\Delta F + P(z, w) = 0, \quad (1.2.1b)$$

ahol $P(*, **)$ a Kármán-féle bilineáris héjoperátor:

$$P(*, **) = \frac{\partial^2 *}{\partial x^2} \frac{\partial^2 **}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 *}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 **}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 *}{\partial y^2} \frac{\partial^2 **}{\partial x^2}.$$

Az (1.2.1a) függőleges felületi egyensúlyt fejez ki. A hajlított héjat olyan, két rétegből összetett felületszerkezetnek tekintjük, ahol az egyik réteg tisztán membrán erőjátékkal, míg a másik tisztán hajlítással és nyírással (lemezhatással) egyensúlyozza a rá jutó teherhányadot. Az egyensúly követelményeinek megfelelően a két ily módon egyensúlyozott teherhányad összege megegyezik a külső teherrel. Az (1.2.1a) baloldalának első tagja a membránhatással, második tagja lemezhatással (*Timoshenko és Woinowsky-Krieger (1966)*) egyensúlyozott teherhányadot fejezi ki. Az (1.2.1b) lapos héj kompatibilitási egyenelete.

Az (1.2.1a-b) differenciálegyenlet-rendszert *Marguerre* vezette le az 1930-as években. A Kirchhoff-féle lemezelmélethez hasonlóan elhanyagolja a síkra merőleges nyírási alakváltozásokat. A p_z teherrel terhelt lapos héj erőjátéka akkor válik ismertté, ha a fenti differenciálegyenlet-rendszerből meghatározzuk a w és az F függvényt. A megoldás akkor válik határozottá, ha megfelelő számú peremfeltételt is állítunk.

1.3. FORGÁSPARABOLOID-HÉJ SAJÁTREZGÉSEI NYÍRÁSI ALAKVÁLTOZÁSOK NÉLKÜL

Értekezésem 1.3. fejezetében a vékony, lapos, szabad peremű forgásparaboloid-héj (1.3.1. ábra) sajátrezgéseinek vizsgálatával foglalkozom a nyírási alakváltozások figyelmen kívül hagyásával. A téma taglalásában az alábbi utat követtem:

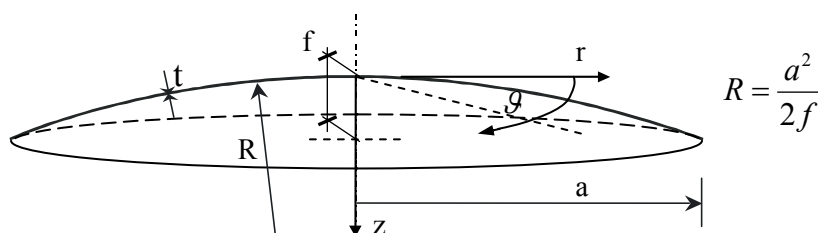
- A forgásparaboloid-héj sajátrezgéseit leíró differenciálegyenlet-rendszerhez előállítottam a szabad peremre vonatkozó peremfeltételeket polárkoordinátás alakban.
- Összefoglaltam a forgásparaboloid-héjből $R = \infty$ helyettesítéssel származtatható egyszerűbb szerkezetek, mint a szabad peremű ágyazatlan körlemez, rugalmas ágyazású körlemez rezgésvizsgálatának összefüggéseit.
- Megoldottam a forgásparaboloid-héj differenciálegyenlet-rendszerét a képzőfüggvényes eljárás segítségével.
- Előállítottam a frekvenciaegyenletet a peremfeltételek figyelembevételével.
- A kidolgozott analitikus megoldásra MATLAB programot készítettem. Kiszámítottam egy forgásparaboloid-héj rezgési jellemzőit, melyeket végeselemes programmal verifikáltam.
- Összehasonlítottam a forgásparaboloid-héj, valamint a belőle származtatható szabad peremű ágyazatlan és rugalmasan ágyazott körlemez dinamikai viselkedését.
- Parametrikus vizsgálatok bemutatása.

1.3.1. Alapfeltételezések

A vizsgált vékony, lapos forgásparaboloid-héj alakja az r , ϑ , z henger-koordináta-rendszerben értelmezett

$$z = \frac{r^2}{2R} = \frac{fr^2}{a^2} \quad (1.3.1)$$

egyenletű, amelynek pereme az $r = a$ sugarú kör. A ϑ szög a z tengelyre merőleges síkban van. A héj egy R sugarú gömb a sugarú köre mentén levágott lapos gömbsüveg helyettesítő forgásparaboloidjának is tekinthető (1.3.1. ábra).



1.3.1. ábra: A forgásparaboloid-héj meridián metszete.

Huang (1964) szerint laposnak tekinthető az 1.3.1. ábra szerinti héj, ha az f magassága nem haladja meg az alapkör $2a$ átmérőjének egy-nyolcadát, ez a korlát azonban a gyakorlat szempontjából egy kissé túlzónak tekinthető.

A szerkezetet egyenletes tömegeloszlásúnak, állandó vastagságúnak és rugalmas izotróp anyagúnak tételezzük fel, nem veszünk figyelembe a felülettel együttmozgó további tömegeket. A vizsgálatban eltekintünk a csillapítástól.

A hég szabad rezgésének differenciálegyenlet-rendszerét a lapos hégak hajlításának Marguerre-féle differenciálegyenletéből (*Flügge (1973), Hegedűs (2000)*) származtatjuk, teherként a középfelület lehajlásfüggvénye alapján képzett tehetetlenségi erőket véve figyelembe. A Marguerre-féle egyenletek ugyanúgy elhanyagolják a nyírési alakváltozásokat, mint a Kirchhoff-féle lemezelmélet.

1.3.2. A forgáspáaboloid-hég differenciálegyenlet-rendszere és peremfeltételei

A lapos hégak hajlításának differenciálegyenlet-rendszerében szereplő z alakfüggvény deriváltjait a forgáspáaboloid (1.3.1) alakfüggvényének deriváltjaiként értelmezve az alábbi két egyenletet kapjuk (*Flügge (1973)*):

$$K\Delta\Delta w - \frac{1}{R}\Delta F = -\rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2}, \quad (1.3.2)$$

$$\frac{1}{Et}\Delta\Delta F + \frac{1}{R}\Delta w = 0, \quad (1.3.3)$$

ahol:

F a membránerők feszültségfüggvénye,

w a normális irányú eltolódás függvénye,

$K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$ a hajlítási merevség

E a hég rugalmassági modulusa,

ν a Poisson-tényező,

t a hégvastagság,

R a forgáspáaboloidhoz a tetőpontjában simuló gömb sugara,

ρ a hég anyagának sűrűsége,

τ az idő független változója.

Δ a kétdimenziós Laplace-féle operátort jelöli, amelynek a henger-koordinátarendszerben értelmezett alakja (*pl. Girkmann (1954)*):

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \vartheta^2}. \quad (1.3.4)$$

A továbbiakban célszerű kihasználni az (1.3.2), (1.3.3) egyenletrendszernek azt a sajátosságát, hogy az egyenletekben szereplő operátorok a Δ operátor egész kitevős hatványai, így az egyenletek formálisan állandó együtthatójú differenciálegyenletként kezelhetők mindaddig, amíg a koordináták közvetlen figyelembevételét elkerülhetjük.

A további vizsgálat tárgya legyen egy az úrszerkezetként alkalmazható, szabadon lebegő tányérantenna. Mivel az úrben lebegő antennára semmilyen mozgáskorlátozás nem hat, a differenciálegyenlet-rendszerhez peremfeltételként csupán azt kell előírunk, hogy az $r = a$ peremen kilépő feszültségek értéke zérus. Ez az alábbi öt feltételt adja a w és az F függvények által meghatározott igénybevételekre vonatkozóan (*Csonka (1981)*):

$$N_r = 0, \quad N_{r,\vartheta} = 0, \quad M_r = 0, \quad M_{r,\vartheta} = 0, \quad Q_r = 0. \quad (1.3.5)$$

A megoldásfüggvényekre (1.3.5) alapján rendre az alábbi peremfeltételeket állíthatjuk az $r = a$ sugarú peremkörön :

- A radiális membránerő nullértékűségéből ($N_r = 0$):

$$\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} = 0, \quad (1.3.6)$$

- a csúsztatóerő nullértékűsége alapján ($N_{r,\vartheta} = 0$):

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) = 0, \quad (1.3.7)$$

- a radiális hajlítónyomaték nullértékűsége alapján ($M_r = 0$):

$$-K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) \right] = 0, \quad (1.3.8)$$

- a csavarónyomaték nullértékűsége alapján ($M_{r,\vartheta} = 0$):

$$-K(1-\nu) \left[\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) \right] = 0, \quad (1.3.9)$$

- a nyíróerő nullértékűsége alapján ($Q_r = 0$):

$$-K \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) = 0. \quad (1.3.10)$$

Ezek a feltételek voltaképpen időtől is függő mennyiségekre vonatkoznak, így a probléma fizikailag korrekt kitűzése megkívánná, hogy a peremfeltételek mellett kezdetiérték-feltételeket is kitűzzünk, mivel azonban csillapítás és külső mozgáskényszerek nélküli szabadrezgést tételezünk fel, ennek nincsen jelentősége. A szuperpozíció elvén feltehetjük, hogy a rezgés tetszőleges számú különböző periódusú és fázisú harmonikus rezgés egymásra halmozódásával áll elő, amelyekre a peremfeltételek külön-külön, egymástól függetlenül érvényesíthetők.

A fizikailag állítható peremfeltételek száma nagyobb a matematikailag teljesíthető feltételek számánál, ugyanúgy, mint a Kirchhoff-féle lemezelméletben szabad lemezperem esetén. A probléma áthidalása is hasonló módon történik, mint a Kirchhoff-féle lemezelméletben, (lásd. *Flügge (1973): Stresses in Shells* 5.35a-b képleteit,) azaz a csavarónyomatéokra vonatkozó (1.3.9) peremfeltételnek a csúsztatóerőkre vonatkozó (1.3.7) és (1.3.10) peremfeltételekbe való beépítésével:

$$N_{r,\vartheta} - \frac{M_{r,\vartheta}}{R} = 0, \quad (1.3.11)$$

$$Q_r + \frac{1}{r} \frac{\partial M_{r,\vartheta}}{\partial \vartheta} = 0. \quad (1.3.12)$$

Ezekből az egyenletekből F és w behelyettesítésével (1.3.7), (1.3.9) és (1.3.10) helyett a következő két peremfeltételi egyenlet állítható az $r = a$ peremen:

$$-\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \frac{K(1-\nu)}{R} \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) = 0, \quad (1.3.13)$$

$$-K \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) - \frac{K(1-\nu)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (1.3.14)$$

A helyettesítő peremfeltételek bevezetésével a vagy csak a lehajlásra, vagy csak a feszültségfüggvényre vonatkozó eredeti peremfeltételek helyett olyan feltételrendszert kaptunk, amelyben az egyik feltétel mind a két ismeretlen függvényt tartalmazza.

1.3.3. Speciális esetek vizsgálata

A forgáspároloid-héj differenciálegyenlet-rendszerének megoldása előtt még célszerű közzismertebb, egyszerűbb szerkezetek rezgésvizsgálatát áttekinteni. Két ilyen szerkezet rezgésvizsgálata ígér tanulságos összevetést: az ágyazatlan körlemeze és a rugalmas ágyazású körlemeze (1.3.2. ábra), mellyel több szerző is foglalkozott (pl. *Soedel (1986)*).

Ha R értékét végtelenre vesszük fel, egy ágyazatlan körlemeze-feladathoz jutunk. Valóban, ekkor az (1.3.2) a vékony lemezek rezgéseinek

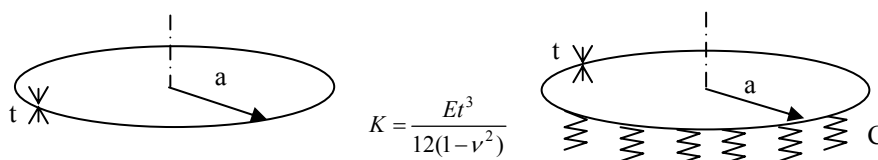
$$K \Delta \Delta w + \rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0 \quad (1.3.15)$$

differenciálegyenletébe megy át, és teljesen függetlenné válik az (1.3.3) egyenlettől, amely az izotróp tárcsák rugalmas alakváltozásainak kompatibilitását kifejező Airy-féle differenciálegyenlettel lesz azonos. (Tekintve, hogy ez az egyenlet nem tükröz gyorsulási hatásokat, nem állíthatjuk, hogy az egyenletrendszer egy lemez és egy tárcsa rezgéseinek független leírására esik szét.)

A rugalmas ágyazású körlemeze rezgéseinek differenciálegyenlete egyetlen tagban tér el az (1.3.15) differenciálegyenlettől (*Timoshenko (1966)*). Ez azt veszi figyelembe, hogy az ágyazaton fekvő lemez felületére az ágyazat merevségétől függő és a lehajlással arányos nagyságú visszatérítő feszültség hat:

$$K \Delta \Delta w + Cw + \rho t \frac{\partial^2 w}{\partial \tau^2} = 0, \quad (1.3.16)$$

ahol: C a Winkler-féle ágyazási tényező.



1.3.2. ábra: Ágyazatlan és rugalmasan ágyazott körlemeze.

Szabad peremű lemez esetén mindkét differenciálegyenlethez olyan peremfeltételek tartoznak, amelyek a radiális hajlítónyomaték (1.3.8) és a Kirchhoff-féle (1.3.14) helyettesítő nyíróerő eltűnését írják elő az $r = a$ peremen:

$$-K \left[\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \nu \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) \right] = 0, \quad (1.3.17)$$

$$-K \frac{\partial}{\partial r} (\Delta w) - \frac{K(1-\nu)}{r} \frac{\partial^2}{\partial r \partial \vartheta} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) = 0. \quad (1.3.18)$$

1.3.3.1. A szabad peremű ágyazatlan körlemez rezgésvizsgálata

A szabad peremű körlemez rezgésvizsgálatát a független változók szétválasztásának módszerével végezhetjük. Amennyiben a $w(r, \vartheta, \tau)$ rezgésfüggvényt

$$w(r, \vartheta, \tau) = w(r, \vartheta) \sin \omega \tau \quad (1.3.19)$$

szorzat alakjában tételezzük fel, ezt az alakot az (1.3.15) egyenletbe behelyettesítve az időtől függő szorzótényező kiejthető az egyenletből. Az ebből származó homogén lineáris differenciálegyenlet operátoros alakja:

$$K \left[\Delta \Delta - \frac{\rho t \omega^2}{K} \right] w = 0, \quad (1.3.20)$$

amelyből a K szorzótényező is kiejthető. Az (1.3.20) differenciálegyenletben paraméterként szereplő ω^2 értékét a feladat megoldásához úgy kell felvenni, hogy a differenciálegyenletnek a szabad peremre vonatkozó (1.3.17) és (1.3.18) peremfeltételek mellett nem-triviális megoldása legyen. A továbbiak egyszerűsítése érdekében vezessük be az ω paraméter helyett az ω -tól függő

$$l_\omega = \sqrt[4]{\frac{K}{\rho t \omega^2}} \quad (1.3.21)$$

karakterisztikus hosszúságot. Az l_ω képletébe a K lemezmerevség, valamint a c tranzverzális hangterjedés sebesség

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}} \quad (1.3.22)$$

képletét behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$l_\omega = \sqrt[4]{\frac{c^2 t^2}{\omega^2 12(1-\nu^2)}}. \quad (1.3.23)$$

Ennek a karakterisztikus hosszúságnak az alkalmazásával a differenciálegyenlet a következőképp írható át:

$$\left[\Delta \Delta - \frac{1}{l_\omega^4} \right] w = \left[\left(\Delta + \frac{1}{l_\omega^2} \right) \left(\Delta - \frac{1}{l_\omega^2} \right) \right] w = 0. \quad (1.3.24)$$

Egyszerű behelyettesítéssel meggyőződhetünk arról, hogy ennek a differenciálegyenletnek a megoldásai az alábbi két differenciálegyenlet megoldásai:

$$\left[\Delta + \frac{1}{l_\omega^2} \right] w = 0, \quad (1.3.25)$$

$$\left[\Delta - \frac{1}{l_\omega^2} \right] w = 0. \quad (1.3.26)$$

Az (1.3.25) és (1.3.26) megoldásához újból a változók szétválasztásának módszerét alkalmazzuk. Keressük a megoldásokat a

$$w(r, \vartheta) = \sum_{k=2}^{\infty} A_k(r) \cos k \vartheta \quad (1.3.27)$$

alakban. Ezt az alakot behelyettesítve az (1.3.25) és (1.3.26) egyenletekbe, a ϑ -tól való függést mutató tényező kiejthető, A_k -ra pedig az alábbi közönséges differenciálegyenletek adódnak:

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} + \frac{1}{l_\omega^2} \right] A_k^{(1)}(r) = 0, \quad (1.3.28)$$

$$\left[\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{k^2}{r^2} - \frac{1}{l_\omega^2} \right] A_k^{(2)}(r) = 0. \quad (1.3.29)$$

Az r változó helyett a karakterisztikus hosszúsággal dimenziótlanított

$$\xi = \frac{r}{l_\omega} \quad (1.3.30)$$

változóra áttérve, a fenti egyenletpár a következőképp írható át

$$\left[\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \xi \frac{d}{d\xi} - k^2 + \xi^2 \right] A_k^{(1)}(\xi) = 0, \quad (1.3.31)$$

$$\left[\xi^2 \frac{d^2}{d\xi^2} + \xi \frac{d}{d\xi} - k^2 - \xi^2 \right] A_k^{(2)}(\xi) = 0. \quad (1.3.32)$$

Ezek az egyenletek a közismert Bessel-féle differenciálegyenletek (*Watson (1948)*). Az (1.3.31) egyenlet megoldásai a $J_k(\xi)$ és $N_k(\xi)$ első- és másodfajú k -adrendű Bessel-függvények, az (1.3.32) megoldásai pedig az $I_k(\xi)$ és $K_k(\xi)$ első-, ill. másodfajú k -adrendű

módosított Bessel-függvények. Ezek a függvények egymástól lineárisan függetlenek, ezért az (1.3.24) differenciálegyenlet (1.3.27) struktúrájú megoldásainak általános alakja

$$w_k = A_k \cos k \vartheta = (A_k^{(1)} + A_k^{(2)}) \cos k \vartheta, \quad (1.3.33)$$

melyből

$$w_k = [C_1 J_k(\xi) + C_2 I_k(\xi) + C_3 N_k(\xi) + C_4 K_k(\xi)] \cos k \vartheta. \quad (1.3.34)$$

Az $A_k^{(1)}$ és az $A_k^{(2)}$ megoldásban szereplő függvényeknek jól ismert és szempontunkból fontos tulajdonságai, hogy $J_k(\xi)$ és $I_k(\xi)$ az origó környezetében korlátos értékű, míg $N_k(\xi)$ és $K_k(\xi)$ abszolút értéke a végtelenhez tart, ha a független változóval a nullához közelítünk. A szabad peremű körlemez megoldásában csak olyan függvények juthatnak szerephez, amelyek az $r = 0$ pontban nem szingulárisak, vagyis itteni függvényértékük és parciális deriváltjaik értéke véges. Az (1.3.34) megoldásban emiatt N_k és K_k együtthatója, azaz C_3 és C_4 értéke 0. A fennmaradó

$$w_k = [C_1 J_k(\xi) + C_2 I_k(\xi)] \cos k \vartheta \quad (1.3.35)$$

kifejezésben a C_1 és C_2 együtthatókat úgy kell megválasztani, hogy a megoldásfüggvény kielégítse a lemez $r = a$, ill. $\xi = \frac{a}{\ell_\omega} = \alpha$ peremén előírt peremfeltételeket. Ez a követelmény

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (1.3.36)$$

alakú homogén lineáris egyenletrendszerben foglalható össze, ha az (1.3.35) kifejezést a peremfeltételi egyenletekbe helyettesítjük. Az együtthatómátrix elemei - a Bessel-féle függvények deriváltjaira vonatkozó azonosságok (lásd pl. *Jahnke-Emde-Lösch (1960)* kézikönyve) figyelembevételének lépéseit mellőzve, az egyenletek konstans szorzóit kiejtve - a következők:

$$\begin{aligned} D_{11} &= \left\{ \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \nu \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{k^2}{\xi^2} \right) \right] J_k(\xi) \right\}_{\xi=\alpha} = \\ &= [(1-\nu)(k^2 - k) - \alpha^2] J_k(\alpha) + (1-\nu)\alpha J_{k+1}(\alpha), \end{aligned} \quad (1.3.37)$$

$$\begin{aligned} D_{12} &= \left\{ \left[\frac{d^2}{d\xi^2} + \nu \left(\frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{k^2}{\xi^2} \right) \right] I_k(\xi) \right\}_{\xi=\alpha} = \\ &= [(1-\nu)(k^2 - k) + \alpha^2] I_k(\alpha) - (1-\nu)\alpha I_{k+1}(\alpha), \end{aligned} \quad (1.3.38)$$

$$\begin{aligned} D_{21} &= \left\{ \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{k^2}{\xi^2} \right) J_k(\xi) - \frac{(1-\nu)k^2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} J_k(\xi) \right] \right\}_{\xi=\alpha} = \\ &= \left[\frac{(1-\nu)(k^3 - k^2)}{\alpha} + k\alpha \right] J_k(\alpha) - [(1-\nu)k^2 + \alpha^2] J_{k+1}(\alpha), \end{aligned} \quad (1.3.39)$$

$$\begin{aligned}
D_{22} &= \left\{ \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d^2}{d\xi^2} + \frac{1}{\xi} \frac{d}{d\xi} - \frac{k^2}{\xi^2} \right) I_k(\xi) - \frac{(1-\nu)k^2}{\xi} \frac{d}{d\xi} \left[\frac{1}{\xi} I_k(\xi) \right] \right\}_{\xi=\alpha} = \\
&= - \left[\frac{(1-\nu)(k^3 - k^2)}{\alpha} - k\alpha \right] I_k(\alpha) - [(1-\nu)k^2 - \alpha^2] I_{k+1}(\alpha),
\end{aligned} \tag{1.3.40}$$

ahol:

$$\alpha = \frac{a}{l_\omega} \tag{1.3.41}$$

a körlemez peremének dimenziótlantott radiális koordinátája.

Az (1.3.36) egyenletrendszernek csak akkor van nem-triviális megoldása, ha a determinánsa zérus. Az (1.3.37) - (1.3.40) összefüggések alapján felírható a determináns, és számítógéppel megkereshetők az egyenletrendszer paramétereinek - α -nak, l_ω -nak vagy ω -nak - azok az értékei, amikor a determináns nullává válik.

A számítási eredmények az 1.3.1. táblázat szerint rendezhetők össze. A változók (1.3.27) szétválasztásából következően – a rezgésalakok vizsgálata szerint – a k értéke a rezgési alak gyűrűirányú hullámszámát adja meg, ℓ a gyűrűirányú csomóvonalak száma.

1.3.1. táblázat: Szabad peremű ágyazatlan körlemez $\alpha_{k,\ell}$ rezgési sajátértékei $\nu = 1/3$ esetén.

	$k=0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell=0$	-	-	2.29	3.50	4.64	5.75	11.10	16.33
1	3.01	4.53	5.94	7.27	8.57	9.82	15.81	21.54
2	6.21	7.74	9.19	10.58	11.93	13.25	19.54	25.53
3	9.37	10.91	12.38	13.81	15.20	16.56	23.05	29.23
4	12.53	14.07	15.56	17.01	18.42	19.81	26.45	32.78
5	15.67	17.22	18.72	20.19	21.62	23.03	29.79	36.24
10	31.40	32.96	34.49	35.99	37.48	38.95	46.06	52.89

Az 1.3.1. táblázatból látható, hogy minden k és minden ℓ értékhez az $\alpha = \alpha_{k,\ell}$ értékeinek növekvő sorozata tartozik. Az első két oszlop első eleméhez merevtest-szerű elmozdulás-alak tartozik, azonban külső erő, ill. mozgáskényszer nélkül ilyen rezgés nem alakulhat ki a körlemezen. Az 1.3.1. táblázatban szereplő $\alpha_{k,\ell}$ értékek alapján, az (1.3.23) felhasználásával

$$\omega_{k,\ell} = \frac{1}{l_\omega^2} \frac{ct}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} = \frac{\alpha_{k,\ell}^2}{a^2} \frac{ct}{\sqrt{12(1-\nu^2)}} \tag{1.3.42}$$

képlettel számítható ω értékeket a körlemez sajátkörfrekvenciáinak nevezzük. Ugyanez ez az eredmény megtalálható *Ponomarev (1966)*, valamint *(Leissa (1969))* publikációjában. A legalacsonyabb sajátkörfrekvenciát a $k=2$ értékhez tartozó legkisebb α alapján számíthatjuk. Ezt a vizsgált szerkezet alaprezgésének, a magasabb értékeket a rendszer felharmonikusainak is szokták nevezni. A rezgésszámok arányából megállapítható, hogy - szemben pl. a húrok, rudak és a téglalap-lemezek felharmonikusai, - a szabad peremű körlemez felharmonikusai nem alkotnak egymással és az alaprezgéssel konzonáns (zeneileg összecsengő) rendszert.

1.3.3.2. A szabad peremű, rugalmasan ágyazott körlemez rezgésvizsgálata

A rugalmas ágyazás hatását figyelembe vevő taggal bővített (1.3.16) differenciálegyenletből a változók szétválasztásával és az időtől függő tényező kiküszöbölésével az alábbi differenciálegyenlethez jutunk:

$$\left[\Delta \Delta - \left(\frac{\rho t \omega^2}{K} - \frac{C}{K} \right) \right] w = 0. \quad (1.3.43)$$

A kerek zárójelen belüli első tört a már ismert l_ω negyedik hatványának reciproka. A második tört a rugalmasan ágyazott lemezek statikai vizsgálatában alkalmazott statikus karakterisztikus hossz negyedik hatványának reciproka (*Márkus (1964)*). Ezt a továbbiakban l_{stat} -tal jelöljük:

$$l_{stat} = \sqrt[4]{\frac{K}{C}}. \quad (1.3.44)$$

Az l_{stat} valamint az l_ω jelöléseket felhasználva és az (1.3.43) operátorát szorzattá alakítva:

$$\left[\left(\Delta + \sqrt{\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right) \left(\Delta - \sqrt{\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right) \right] w = 0 \quad (1.3.45)$$

egyenletet kapjuk. Az ágyazatlan körlemezhez hasonlóan a megoldás itt is az alábbi két differenciálegyenlet megoldásának összegeként állítható elő:

$$\left[\Delta + \sqrt{\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right] w = 0, \quad (1.3.46)$$

$$\left[\Delta - \sqrt{\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right] w = 0. \quad (1.3.47)$$

Ha feltesszük, hogy $l_{stat} > l_\omega$, (ennek igazolására később visszatérünk), és bevezetjük az

$$l_k = \left(\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (1.3.48)$$

lengési karakterisztikus hosszat, továbbá a dimenzió nélküli

$$\xi_k = \frac{r}{l_k} \quad (1.3.49)$$

sugarirányú relatív koordinátát, akkor a poláris koordinátaváltozók szétválasztása után az (1.3.31) ill. az (1.3.32) Bessel-féle differenciálegyenleteket kapjuk vissza. Az eltérés csupán annyi, hogy a ξ_k változót az (1.3.48) és az (1.3.49) definiálja. Az általános megoldás (1.3.35) alapján már ismert:

$$w_k = [C_1 J_k(\xi_k) + C_2 I_k(\xi_k)] \cos k\vartheta. \quad (1.3.50)$$

Tekintettel arra, hogy a szabad peremű, rugalmasan ágyazott körlemezre szintén az (1.3.17) és (1.3.18) peremfeltételek vonatkoznak, a C_1 és a C_2 felvételére vonatkozó feltételi egyenletrendszer is azonos az ágyazatlan körlemezre vonatkozó (1.3.37) - (1.3.40) egyenletekkel. Ebből következik, hogy az egyenletrendszer α_k paraméterének – ahol $\alpha_k = \frac{a}{l_k}$

a perem radiális koordinátája – a nem-triviális megoldásokhoz tartozó értékei számszerűen megegyeznek az 1.3.1. táblázatban szereplő $\alpha_{k,\ell}$ értékekkel. Megegyeznek továbbá az adott k , ℓ értékpárokhoz tartozó normált rezgési alakok is. A ξ_k változóknak a (1.3.30) és (1.3.49) szerinti egymástól eltérő értelmezése miatt azonban a rugalmas ágyazású körlemeznel az adott $\alpha_{k,\ell}$ -hez magasabb $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvencia tartozik, mint az ágyazatlan körlemez esetén.

Az (1.3.48)-ból $\alpha_{k,\ell}$ helyettesítésével a sajátkörfrekvenciák

$$\omega_{k,\ell} = \sqrt{\frac{\alpha_{k,\ell}^4}{a^4} \frac{c^2 t^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{C}{\rho t}} \quad (1.3.51)$$

képlettel számíthatók. Ugyanez az eredmény megtalálható *Soedel (1986)* könyvében.

Az (1.3.51) egyenlőség négyzetre emelt

$$\omega_{k,\ell}^2 = \frac{\alpha_{k,\ell}^4}{a^4} \frac{c^2 t^2}{12(1-\nu^2)} + \frac{C}{\rho t} \quad (1.3.52)$$

alakjában egy

$$\omega_{k,\ell}^2 = (\omega_{k,\ell}^{(1)})^2 + (\omega^{(2)})^2 \quad (1.3.53)$$

Southwell-féle összegzést (*Rayleigh, J. W. S (1945)*) ismerhetünk fel, amelynek $\omega_{k,\ell}^{(1)}$ összetevője (1.3.42) alapján az ágyazatlan körlemez sajátkörfrekvenciája, $\omega^{(2)}$ pedig a C merevségű ágyazaton fekvő, $m = \rho t$ felületegységre vonatkoztatott tömegű, hajlítómerevség nélküli lemez

$$\omega_{rugó} = \sqrt{\frac{C}{m}} = \sqrt{\frac{C}{\rho t}} \quad (1.3.54)$$

sajátkörfrekvenciája. Hajlítómerevség nélkül minden felületelem és a hozzákapcsolt elemi rugó független egyszabadságfokú rezgő rendszert alkot, így a felület tetszőleges lengésalakkal, de csak egyetlen, az (1.3.54) szerinti sajátkörfrekvenciával rezeghet. Ez a sajátkörfrekvencia tehát független k és ℓ értékétől.

A sajátrezgések frekvencia-négyzeteire vonatkozó Southwell-féle összegzés alsó korlátot szolgáltat a keresett sajátfrekvenciákra, ha a parciális merevségű rendszerek rezgésalakjai csak közelítő egyezést mutatnak. Esetünkben a hajlítómerevség nélküli rugalmas ágyazású, második rendszerhez tetszőleges rezgési alak tartozhat az elemi rugók függetlensége miatt. Ez a tetszőleges rezgési alak az első rendszerével, az ágyazatlan

körlemezével azonosra is felvehető, ezért a fentiek értelmében az (1.3.53) Southwell-féle összegzés pontosan adja a rugalmas ágyazású lemez sajátkörfrekvenciáit.

A Southwell-féle összegzés alapján még egy fontos megállapítást tehetünk. A rugómerevségből számítható $\omega_{rugó}$ értéke önmaga is alsó korlátja a rugalmasan ágyazott körlemez sajátkörfrekvenciáinak. Az (1.3.21) és az (1.3.44) képlet felhasználásával megállapíthatjuk, hogy ez a rezgési frekvencia $l_{stat} = l_\omega$ esetén lép fel. Ebből az következik, hogy l_{stat} felső korlátja l_ω -nak, azaz a fejezet elején a karakterisztikus hosszak viszonyára vonatkozóan előre bocsátott feltételezés helytálló volt. Az (1.3.48) szerinti l_k nem vehet fel komplex értéket, a rugalmasan ágyazott körlemez rezgési alakjai - a $k = 0, 1$ és $\ell = 0$ értékpárokhoz tartozó móduszok kivételével - mind leírhatók valós argumentumú Bessel függvények segítségével. Ha $l_{stat} = l_\omega$, akkor az (1.3.48)-ból formálisan az $l_k = \infty$ következik, azaz a rezgési alakfüggvény nem mutat hullámzást, vagyis leírható konstans vagy lineáris függvényvel. Ezek a $k = 0, 1$ és $\ell = 0$ értékpárokhoz tartozó móduszok merevtestszerű elmozdulásokat mutatnak.

1.3.3.3. A forgásparaboloid-héj nyúlásmentes alakváltozásai

A körlemez lehajlásai nyúlásmentesek, ha eltekintünk a sík középfelület megnyúlásától. A körlemez lemezzvastagságát megközelítő maximális lehajlások esetén már irreális eredményt adhatnak a középfelület nyúlásának figyelmen kívül hagyásával végzett vizsgálatok, akkor is, ha a perem csak a középsíkra merőleges eltolódásokkal szemben van rögzítve. Ha viszont a perem szabad, a lemezzvastagságot sokszorososan meghaladó lehajlás esetén is csekély hiba adódhat. Ebből arra következtethetünk, hogy amennyiben a forgásparaboloid-héj annyira lapos, hogy ívmagassága az említett lemez-lehajlások nagyságrendjébe esik, rezgési viselkedése egyes rezgésalakok esetén hasonló lesz a körlemezéhez, de arra is, hogy más alakok esetén erősen eltérhet attól. Hasonlóság akkor várható, ha kevésbé érvényesül a középfelület nyúlásainak hatása, vagyis ha a rezgésalak közel áll a paraboloid nyúlásmentes alakváltozásához.

A héj nyúlásmentes alakváltozásainak differenciálegyenletét úgy kapjuk, hogy az (1.3.3) kompatibilitási egyenletbe az $F = 0$ értéket helyettesítjük be:

$$\frac{1}{R} \Delta w_{inext} = 0. \quad (1.3.55)$$

A nyúlásmentes alakváltozásokat a tartomány belsejében és határán szingularitás nélküli valós, kétváltozós harmonikus függvények írják le. Ezek általános alakja hengerkoordinátarendszerben

$$w_{inext} = \sum_{k=2}^{\infty} (A_k \cos k\vartheta + B_k \sin k\vartheta) r^{k+2}. \quad (1.3.56)$$

A $k = 0$ és $k = 1$ értékhez merevtestszerű elmozdulások tartoznak. Az általános alakból az olvasható ki, hogy a nyúlásmentes alakváltozásokra az $r = a$ peremen perempontonként egyetlen peremfeltételt állíthatunk. (Előírhatjuk pl., hogy a peremen a lehajlás $w_{inext}(a, \vartheta)$ értékét tetszőlegesen, - természetesen 2π szerint periodikus - függvény írja le.) Arra nincsen lehetőség, hogy a héj, a 1.3.2. fejezetben részletezett peremfeltétel-rendszerét - vagy annak csak a lehajlásfüggvényt korlátozó feltételeit - nyúlásmentes alakváltozásokkal ki tudjuk elégíteni. Ez azért fontos megállapítás, mert ellenkező esetben a tányérantenna rezgésvizsgálatát lényegében egy körlemez rezgésvizsgálatára lehetne egyszerűsíteni.

1.3.4. A forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata differenciálegyenlet-rendszer sajátérték-feladatként

A választott peremfeltételek lehetővé teszik, hogy a paraboloid héj rezgésvizsgálatát is a változók szétválasztásának módszerével végezzük. A lehajlásfüggvényt $w = w(r, \vartheta) \sin \omega \tau$, a feszültségfüggvényt $F = F(r, \vartheta) \sin \omega \tau$ alakban keresve az (1.3.2) - (1.3.3) differenciálegyenlet-rendszerből kiejthető az időtől való függést mutató $\sin \omega \tau$ szorzótényező, a peremfeltételek pedig az alábbi parciális differenciálegyenlet-rendszerre értelmezendők:

$$K\Delta\Delta w - (\rho t \omega^2)w - \frac{1}{R}\Delta F = 0, \quad (1.3.57)$$

$$\frac{1}{R}\Delta w + \frac{1}{Et}\Delta\Delta F = 0. \quad (1.3.58)$$

Az ω most a homogén differenciálegyenlet-rendszer paramétere. A paraméteres homogén lineáris differenciálegyenlet-rendszerekre is értelmezhető az ún. alternatíva-tétel: ω értékét folytonosan változtatva az adott peremfeltétel-rendszer mellett vagy csak triviális zérus megoldásvektort találunk, vagy pedig végtelen sok, egymással lineárisan összefüggő megoldást. Azt a diszkrét ω_k , $k = 0, 1, 2, \dots, \infty$ értékrendszert, amely mellett az utóbbi áll fenn, az egyenletrendszerrel és a peremfeltételekkel kitűzött probléma sajátértékeinek, az egyes ω_k -hoz talált megoldások alaprendszerét a probléma sajátfüggvény-vektorainak nevezzük. Ez a probléma analóg a mátrixokra vonatkozó sajátérték-feladattal, a megoldásban is alkalmazhatók a mátrixokra vonatkozó sajátérték-feladatok megoldási módszerei.

1.3.4.1. A feszültségfüggvény kiküszöbölhetőségének vizsgálata

Az (1.3.57) egyenletre a Δ operációt alkalmazva, majd az így kapott egyenletet (1.3.58) egyenlettel kombinálva olyan összefüggésre juthatunk, amely csak a w ismeretlen tartalmazza:

$$\Delta \left[K\Delta\Delta + \frac{Et}{R^2} - (\rho t \omega^2) \right] w = 0. \quad (1.3.59)$$

A szögletes zárójelben szereplő kifejezés felfogható egy K hajlítási merevségű,

$$C = \frac{Et}{R^2} \quad (1.3.60)$$

ágyazási tényezőjű rugalmas ágyazaton fekvő lemez rezgésalakjaira vonatkozó homogén differenciálegyenlet operátorának. Amennyiben szögletes zárójelben szereplő kifejezésbe w -t helyettesítve a kifejezés nullává válik, maga az (1.3.59) differenciálegyenlet is teljesül.

Ebből könnyen arra következtethetnénk, hogy a forgásparaboloid-héj rezgésalakjait és sajátfrekvenciáit egy helyettesítő rugalmas ágyazású körlemez megoldásai adják. Ez azonban téves következtetés lenne. Egyrészt azért, mert az (1.3.59) egyenlet operátorában egy további Δ operátor-szorzó is szerepel, ezért a megoldás komponensei közt a rugalmas ágyazású helyettesítő lemez rezgésalakjai mellett szerephez juthatnak a $\Delta w = 0$ egyenletet teljesítő

megoldások is, amelyek az (1.3.55) egyenlet értelmében a paraboloid-héj nyúlásmentes alakváltozásai, így alakulásukban nincs közvetlen szerepe a fiktív rugalmas ágyazásnak. Másrészt azért, mert az (1.3.13) helyettesítő peremfeltétel miatt w kapcsolttá válik az (1.3.59) egyenletből kiejtett F -fel. A vizsgálatot ezért olyan módszerrel kell elvégeznünk, amely lehetőséget ad az (1.3.57) - (1.3.58) egyenletrendszer teljes általános megoldásának a figyelembevételére.

1.3.4.2. A képzőfüggvény bevezetése

Alkalmazzuk a differenciálegyenlet-rendszer teljes megoldásának előállítására az operátormátrix determinánsának és adjungáltjának értelmezésén alapuló képzőfüggvényes eljárást. Ezzel a módszerrel jelentősen csökkenthetők a hengerkoordináta-rendszer alkalmazásából származó algebrai nehézségek is. Ezt az eljárást *Hegedűs (1986)* vastaghéjalású szendvicserenda megoldásán mutatta be, inhomogén differenciálegyenlet-rendszerre alkalmazva.

A képzőfüggvényes eljárás alapelve a következő. A koordinátarendszerre invariáns alakú lineáris differenciálegyenlet-rendszerben szereplő operációk sorrendje ugyanúgy felcserélhető, mint a konstans tényezőkkel való szorzásé. Ez a formális felcserélhetőség lehetővé teszi, hogy az operátormátrixra értelmezni tudjuk azokat a mátrixalgebrai fogalmakat, amelyeket a skalárelemű kvadratikus mátrixokkal megadott feladatok megoldásához be szoktak vezetni. Ezek közül a mátrix determinánsa és az adjungált mátrix értelmezése szükséges.

Jelölje a

$$\Theta = [\theta_{ij}] \quad i, j = 1, \dots, n$$

mátrix a

$$\Theta y = 0 \quad (1.3.61)$$

homogén differenciál-egyenletrendszer operátormátrixát, amelynek elemei egymással felcserélhető differenciáloperátorok.

Legyen $\det(\Theta)$ az operátormátrixnak a mátrixaritmetika szabályai szerint képzett determinánsa,

$$\det(\Theta)_{ij} \quad i, j = 1, \dots, n$$

pedig jelölje a mátrix i, j elemeihez tartozó előjeles, azaz a $(-1)^{i+j}$ szorzót is magába foglaló aldeterminánsokat. Ezek mindegyike egymással felcserélhető differenciáloperátor.

Az operátormátrix adjungáltjának elemeit az előjeles aldeterminánsok alkotják:

$$\text{adj}(\Theta) = [\det(\Theta)_{ji}] \quad i, j = 1, \dots, n$$

Legyen H olyan függvény, amely kielégíti az alábbi differenciálegyenletet:

$$\det(\Theta)H = 0. \quad (1.3.62)$$

Igazolható, hogy a H függvény segítségével az (1.3.61) differenciál-egyenletrendszer $y^{(k)}$ megoldásvektora képezhető az alábbi módon:

$$y^{(k)} = \begin{bmatrix} \det(\Theta)_{1k} \\ \det(\Theta)_{2k} \\ \dots \\ \det(\Theta)_{nk} \end{bmatrix} H, \quad (1.3.63)$$

vagyis az adjungált operátormátrix k -adik oszlopát, (vagy transzponáltjának k -adik sorát) alkalmazzuk a H függvényre. Ennek igazolásához helyettesítsük az (1.3.63)-t az (1.3.61)-be:

$$\Theta y = \Theta \begin{bmatrix} \det(\Theta)_{1k} \\ \det(\Theta)_{2k} \\ \dots \\ \det(\Theta)_{nk} \end{bmatrix} H = 0. \quad (1.3.64)$$

Az, hogy (1.3.64) teljesül az a determinánsok kifejtési tétele alapján látható be:

$$\sum_{j=1}^n \theta_{ij} \det(\Theta)_{jk} = \det(\Theta), \quad \text{ha } i = k,$$

$$\sum_{j=1}^n \theta_{ij} \det(\Theta)_{jk} = 0, \quad \text{ha } i \neq k,$$

tehát a feltételezett (1.3.63) megoldás valóban kielégíti az (1.3.61)-t. A H függvényt tehát felhasználhatjuk arra, hogy az operátormátrix adjungáltja segítségével az egyenletrendszer megoldásvektorait képezzük.

Az (1.3.62) differenciálegyenletet az (1.3.61) differenciálegyenlet-rendszer karakterisztikus differenciálegyenletének, H függvényt pedig a megoldásvektor képzőfüggvényének nevezzük. Amennyiben a H az (1.3.64) karakterisztikus differenciálegyenlet általános megoldása, $y^{(k)}$ pedig tartalmazza az általános megoldás összes szabad paraméterét, akkor az $y^{(k)}$ -t a differenciálegyenlet-rendszer általános megoldásának tekinthetjük.

Olyan esetben, ha az adjungált operátormátrix minden eleméből kiemelhető egy közös operátorszorzó, ugyanez kiemelhető a karakterisztikus differenciálegyenlet operátorából is. Ilyen esetben mind a determinánsból, mind az adjungált elemeiből el kell hagyni a közös operátorszorzót. Ezt végrehajtva mindig képezhető az adjungált soraiból származtatott $y^{(k)}$ megoldásvektorok olyan kombinációja, amely az általános megoldás összes szabad paraméterét tartalmazza.

A képzőfüggvény alkalmazásának a legfontosabb előnye, hogy az (1.3.62) differenciálegyenlet megoldása után az összes ismeretlen függvény deriválással állítható elő, így nem kerülnek a megoldásba formálisan függetlennek látszó további integrálási konstansok. Másik előnye, hogy a peremértékekre és peremderiváltakra vonatkozó peremfeltételek közvetlenül a képzőfüggvényre vonatkozó feltételként vehetők figyelembe.

Esetünkben a már említett felcserélhetőség mindaddig fennáll, amíg a Δ operátorokat nem fejezzük ki az r illetve \mathcal{G} szerinti deriváltakkal. Az (1.3.57) - (1.3.58) homogén differenciálegyenlet-rendszer

$$\Theta \begin{bmatrix} w \\ F \end{bmatrix} = 0 \quad (1.3.65)$$

mátrixos felírású alakjának operátormátrixa

$$\Theta = \begin{bmatrix} K\Delta\Delta - (\rho t \omega^2) & -\frac{1}{R}\Delta \\ \frac{1}{R}\Delta & \frac{1}{Et}\Delta\Delta \end{bmatrix}, \quad (1.3.66)$$

operátordeterminánása

$$\det(\Theta) = \frac{K}{Et} \Delta\Delta\Delta\Delta + \left(\frac{1}{R^2} - \frac{\rho\omega^2}{E} \right) \Delta\Delta, \quad (1.3.67)$$

az operátormátrix adjungáltja

$$\text{adj}(\Theta) = \begin{bmatrix} \frac{1}{Et}\Delta\Delta & -\frac{1}{R}\Delta \\ \frac{1}{R}\Delta & K\Delta\Delta - (\rho t \omega^2) \end{bmatrix} \quad (1.3.68)$$

alakban adódik.

Az adjungált operátormátrix elemeinek nincsen közös operátorszorzója, ezért a homogén általános megoldás H képzőfüggvényeként a

$$\det(\Theta)[H] = 0 \quad (1.3.69)$$

karakterisztikus differenciálegyenlet általános megoldását használhatjuk.

Az (1.3.69) differenciálegyenlet operátora első lépésben a

$$\det(\Theta) = \frac{K}{Et} [\Delta\Delta] \left[\Delta\Delta - \left(\frac{\rho t \omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \right) \right] \quad (1.3.70)$$

alakra faktorizálható. Az (1.3.70) második operátorszorzójában álló $\frac{\rho t \omega^2}{K}$ törtben a szabad peremű ágyazatlan körlemez (1.3.21) képletével bevezetett l_ω hosszúság negyedik hatványának a reciprokát ismerhetjük fel, az $\frac{Et}{KR^2}$ tört pedig az

$$l_{stat} = \sqrt[4]{\frac{KR^2}{Et}} = \sqrt[4]{\frac{t^2 R^2}{12(1-\nu^2)}} \quad (1.3.71)$$

karakterisztikus hossz negyedik hatványának a reciprokaként értelmezhető. Ez a hosszúság hasonló szerephez jut a hajlított lapos forgáspároloid-héjak statikai vizsgálatában, mint az (1.3.44) egyenlettel definiált karakterisztikus hossz a rugalmas ágyazású körlemezeknél. Ez indokolja az azonos elnevezést.

A karakterisztikus hosszak behelyettesítésével és második operátorszorzó további faktorizálásával a karakterisztikus differenciálegyenlet operátorát egy negyed- és két másodrendű operátor szorzatára bonthatjuk:

$$\det(\Theta) = \frac{l_{stat}^4}{R^2} [\Delta \Delta] \left[\Delta + \sqrt{\frac{1}{l_{\omega}^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right] \left[\Delta - \sqrt{\frac{1}{l_{\omega}^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right]. \quad (1.3.72)$$

Ez a faktorizálás lehetőséget ad arra, hogy a nyolcadrendű karakterisztikus differenciálegyenlet megoldását egy negyed- és két másodrendű differenciálegyenlet megoldásainak kombinálásával állítsuk elő.

Az első csoportot a
$$\Delta \Delta H^{(1)} = 0, \quad (1.3.73)$$

a második csoportot a
$$\left[\Delta + \sqrt{\frac{1}{l_{\omega}^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right] H^{(2)} = 0, \quad (1.3.74)$$

a harmadik csoportot a
$$\left[\Delta - \sqrt{\frac{1}{l_{\omega}^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} \right] H^{(3)} = 0 \quad (1.3.75)$$

differenciálegyenletek megoldásai alkotják.

1.3.4.3. A karakterisztikus differenciálegyenlet megoldása

Az (1.3.69) karakterisztikus differenciálegyenlet megoldását a korábbi fejezetekben alkalmazott módon,

$$H = A_k(r) \cos k \vartheta \quad (1.3.76)$$

alakban kereshetjük. Ezt az alakot a differenciálegyenletbe behelyettesítve, majd a ϑ szerinti függést kifejező trigonometrikus kifejezést az egyenletből kiejtve, $A_k(r)$ -re egy nyolcadrendű, változó együtthatójú közönséges homogén differenciálegyenlet adódik. Az $A_k(r)$ függvényt nem ennek a differenciálegyenletnek a megoldásaként állítjuk elő, hanem úgy, hogy az (1.3.76) próbafüggvény alakot közvetlenül az (1.3.73), (1.3.74) és (1.3.75) negyed-, ill. másodrendű differenciálegyenletekbe behelyettesítjük, és képezzük az így adódó differenciálegyenletek $A_k^{(1)}$, $A_k^{(2)}$, $A_k^{(3)}$ általános megoldásainak összegét:

$$A_k(r) = A_k^{(1)}(r) + A_k^{(2)}(r) + A_k^{(3)}(r). \quad (1.3.77)$$

A nem-elfajuló esetekben feltehetjük, hogy ezek a megoldáskomponensek lineárisan függetlenek, így a $4+2+2 = 8$ szabad paramétert tartalmazó összeg valóban az A_k -ra vonatkozó nyolcadrendű differenciálegyenlet általános megoldása.

Az (1.3.73) differenciálegyenlet alapján $A_k^{(1)}$ -re levezethető

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left\{ r \frac{d}{dr} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r A_k^{(1)} \right) - \frac{k^2}{r^2} A_k^{(1)} \right] \right\} - \frac{k^2}{r^2} \left[\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r A_k^{(1)} \right) - \frac{k^2}{r^2} A_k^{(1)} \right] = 0 \quad (1.3.78)$$

differenciálegyenlet ún Euler-típusú homogén fokszámú differenciálegyenlet, amelynek általános megoldása

$$k = 0 \text{ esetén} \quad A_0^{(1)} = C_1 + C_2 r^2 + C_3 \ln r + C_4 r^2 \ln r ,$$

$$k = 1 \text{ esetén} \quad A_1^{(1)} = C_1 r + C_2 r^3 + C_3 \ln r^{-1} + C_4 r \ln r ,$$

$$k > 1 \text{ esetén} \quad A_k^{(1)} = C_1 r^k + C_2 r^{k+2} + C_3 \ln r^{-k} + C_4 r \ln r^{-k+2} .$$

Az (1.3.74) differenciálegyenlet alapján $A_k^{(2)}$ -re levezethető

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} A_k^{(2)} \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} - \frac{k^2}{r^2} \right) A_k^{(2)} = 0 \quad (1.3.79)$$

és az (1.3.75) alapján $A_k^{(3)}(r)$ -re levezethető

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{d}{dr} A_k^{(3)} \right) - \left(\sqrt{\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4}} + \frac{k^2}{r^2} \right) A_k^{(3)} = 0 \quad (1.3.80)$$

differenciálegyenletek Bessel-típusú differenciálegyenletek, amelyek általános megoldásában szereplő függvények típusa részint a négyzetgyök alatti kifejezés előjelétől, részint magának a négyzetgyököt tartalmazó tagnak az előjelétől függ.

Tételezzük fel, - ahogy a rugalmas ágyazású körlemez vizsgálatánál is tettük - hogy az (1.3.79) és az (1.3.80) egyenletben a négyzetgyök alatti kifejezés értéke pozitív. Ebben az esetben az (1.3.21) és az (1.3.71) figyelembevételével az

$$l_k = \left(\frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4} \right)^{-\frac{1}{4}} = \left(\frac{\rho t \omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \right)^{-\frac{1}{4}} \quad (1.3.81)$$

ún. lengési karakterisztikus hossz valós hosszúságként értelmezhető, és a

$$\xi_k = \frac{r}{l_k} \quad (1.3.82)$$

változó transzformáció bevezetésével az (1.3.79) egyenlet a

$$\xi_k^2 \frac{d^2 A_k^{(2)}(\xi_k)}{d\xi_k^2} + \xi_k \frac{d A_k^{(2)}(\xi_k)}{d\xi_k} + [\xi_k^2 - k^2] A_k^{(2)}(\xi_k) = 0 \quad (1.3.83)$$

kanonikus alakú Bessel-féle differenciálegyenletté írható át. Ennek a megoldásai a $J_k(\xi)$ és $N_k(\xi)$ első- és másodfajú k -adrendű Bessel-függvények. Az (1.3.80) egyenlet ugyanezzel a transzformációval a

$$\xi_k^2 \frac{d^2 A_k^{(3)}(\xi_k)}{d\xi_k^2} + \xi_k \frac{dA_k^{(3)}(\xi_k)}{d\xi_k} - [\xi_k^2 + k^2] A_k^{(3)}(\xi_k) = 0 \quad (1.3.84)$$

egyenletbe vihető át, amely a módosított vagy képzetes argumentumú Bessel-féle differenciálegyenlet kanonikus alakja. Ennek a megoldásai az $I_k(\xi)$ és $K_k(\xi)$ első-, ill. másodfajú k -adrendű módosított Bessel-függvények.

Az (1.3.78), (1.3.83) és (1.3.84) megoldásai egymástól lineárisan független függvények, ha tehát a lengési karakterisztikus hossz valós érték, az általános megoldás

$$A_k^{(1)} + A_k^{(2)} + A_k^{(3)} = A_k^{(1)} + C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k) + C_7 N_k(\xi_k) + C_8 K_k(\xi_k). \quad (1.3.85)$$

Az $A_k^{(2)}$ és az $A_k^{(3)}$ megoldásban szereplő függvényeknek jól ismert és szempontunkból fontos tulajdonságai, hogy $J_k(\xi)$ és $I_k(\xi)$ az origó környezetében korlátos értékű, míg $N_k(\xi)$ és $K_k(\xi)$ abszolút értéke a végtelenhez tart, ha a független változóval a nullához közelítünk. A forgáspároloid-héj megoldásában csak olyan függvények juthatnak szerephez, amelyek az $r = 0$ pontban nem szingulárisak, vagyis függvényértékük és parciális deriváltjaik értéke véges. Emiatt az $A_k^{(1)}$ megoldásban C_3 és C_4 , továbbá az $A_k^{(2)}$ megoldásban $N_k(\xi)$ és az $A_k^{(3)}$ megoldásban $K_k(\xi)$ együtthatója - azaz az (1.3.85) egyenletben C_7 és C_8 értéke 0.

A képzőfüggvény ennek megfelelően - az $A_k^{(1)}$ -ban is alkalmazva a ξ független változót, - a következő:

$$H_k = \left[C_{1k} \xi_k^k + C_{2k} \xi_k^{k+2} + C_{5k} J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k) \right] \cos k\vartheta. \quad (1.3.86)$$

A megoldásvektort (1.3.68) első sora alapján képezve, egyúttal figyelembe véve a képzőfüggvényeknek a differenciálegyenletből kiolvasható sajátságait, továbbá a Bessel-féle függvények alábbi azonosságait,

$$\begin{aligned} \Delta [I_k(\xi_k) \cos k\vartheta] &= \frac{1}{l_k^2} I_k(\xi_k) \cos k\vartheta, \\ \Delta [J_k(\xi_k) \cos k\vartheta] &= -\frac{1}{l_k^2} J_k(\xi_k) \cos k\vartheta \end{aligned} \quad (1.3.87)$$

a következőt kapjuk:

$$\begin{aligned} w_k^{(1)} &= \frac{1}{Et} \Delta \Delta \{H_k\} = \frac{1}{Et l_k^4} [C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k)] \cos k\vartheta, \\ F_k^{(1)} &= -\frac{1}{R} \Delta \{H_k\} = -\frac{1}{R l_k^2} [4C_2(k+1)\xi_k^k - C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k)] \cos k\vartheta. \end{aligned}$$

Ebben a megoldásvektorban nem szerepel a C_1 szabadon választható paraméter. Képezzük ezért a megoldásvektort az adjungált mátrix második sora alapján is:

$$\begin{aligned} w_k^{(2)} &= \frac{1}{R} \Delta \{H_k\} = \frac{1}{R l_k^2} [4C_2(k+1)\xi_k^k - C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k)] \cos k\vartheta, \\ F_k^{(2)} &= K \left[\Delta \Delta - \frac{1}{l_\omega^4} \right] \{H_k\} = \end{aligned} \quad (1.3.88)$$

$$\begin{aligned}
&= K \left[-\frac{1}{l_\omega^4} (C_1 \xi_k^k + C_2 \xi_k^{k+2}) + \left(\frac{1}{l_k^4} - \frac{1}{l_\omega^4} \right) (C_5 J_k(\xi_k) + C_6 I_k(\xi_k)) \right] \cos k\vartheta = \\
&= -K \left[\frac{1}{l_\omega^4} (C_1 \xi_k^k + C_2 \xi_k^{k+2}) + \frac{1}{l_{stat}^4} (C_5 J_k(\xi_k) - C_6 I_k(\xi_k)) \right] \cos k\vartheta . \quad (1.3.89)
\end{aligned}$$

Tekintettel arra, hogy ez a megoldásvektor már tartalmazza az összes szabad paramétert, ezt használjuk a továbbiakban. Említésre méltó a megoldásrendszerben, hogy a képzőfüggvény C_1 együtthatójú tagja, amely harmonikus függvény, csak F -ben ad megoldáskomponenst. Az ennek megfelelő tag a w függvényben nyúlásmentes komponenst jelölne ki.

1.3.4.4. A frekvenciaegyenlet és a rezgési elmozdulási alakok

A frekvenciaegyenlet előállításához a következő feladatunk a differenciál-egyenletrendszer peremfeltételeinek érvényesítése a képzőfüggvényre. Ez úgy történik, hogy az (1.3.88)-ból és (1.3.89)-ből kapott w és F függvényt behelyettesítjük a peremfeltételi egyenletekbe. Az $r = a$ peremen:

$$\xi_k = \alpha_k = \frac{a}{l_k}. \quad (1.3.90)$$

Az (1.3.6), (1.3.13), (1.3.8) és (1.3.14) egyenletek a ξ_k változó alkalmazásával a következők:

$$\left\{ \frac{1}{\xi_k} \frac{\partial F}{\partial \xi_k} + \frac{1}{\xi_k^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \vartheta^2} \right\}_{\xi_k = \alpha_k} = 0, \quad (1.3.91)$$

$$\left\{ -\frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{\xi_k} \frac{\partial F}{\partial \vartheta} \right) + \frac{K(1-\nu)}{R} \frac{\partial}{\partial \xi_k} \left(\frac{1}{\xi_k} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) \right\}_{\xi_k = \alpha_k} = 0, \quad (1.3.92)$$

$$\left\{ \frac{\partial^2 w}{\partial \xi_k^2} + \nu \left(\frac{1}{\xi_k} \frac{\partial w}{\partial \xi_k} + \frac{1}{\xi_k^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \vartheta^2} \right) \right\}_{\xi_k = \alpha_k} = 0, \quad (1.3.93)$$

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_k} (\Delta w) + \frac{(1-\nu)}{\xi_k} \frac{\partial^2}{\partial \xi_k \partial \vartheta} \left(\frac{1}{\xi_k} \frac{\partial w}{\partial \vartheta} \right) \right\}_{\xi_k = \alpha_k} = 0. \quad (1.3.94)$$

A behelyettesítések elvégzésével a négy peremfeltétel alapján négy homogén lineáris egyenletből álló egyenletrendszer írható fel a C_1 , C_2 , C_5 és C_6 paraméterekre.

Az (1.3.91) – (1.3.94) egyenletrendszer nem-triviális megoldását az alábbi egyenlőség teljesülése adja, mely a vizsgált forgásparaboloid-héj frekvenciaegyenletének tekinthető, természetesen szabad perem esetén:

$$\det(D(\alpha_k(\omega))) = 0, \quad (1.3.95a)$$

részletezve:

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \\ C_4 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = 0. \quad (1.3.95b)$$

Az (1.3.95b) egyenletrendszer D együttható-mátrixának 16 eleme az F1. Függelékben található. Az (1.3.95) egyenletben, – mint ahogy azt a szabad peremű ágyazatlan, valamint a rugalmas ágyazású körlemeznel láttuk – minden egyes k -hoz növekvő ω mellett $\ell = 1, 2, \dots, \infty$ gyököket találunk.

A rugalmasan ágyazott körlemezrel való rokonságot mutatja, hogy a forgásparaboloid-héj D determinánsának 3-4-ik oszlopából és sorából alkotott blokk megtalálható a rugalmasan ágyazott körlemez frekvenciaegyenletében.

Az (1.3.95) feltétel nincsen tekintettel arra, hogy "valódi", vagy merevtestszerű alakváltozásokról van-e szó, mivel azonban a lebegő szerkezet külső erők nélkül nem végezhet merevtestszerű periodikus mozgásokat, ezért ezeket ki kell zárunk a megoldásból. Az, hogy az (1.3.95) feltétel megengedi a merevtestszerű mozgást is, abban jelentkezik, hogy a $k = 0$ és $k = 1$ értékeknél a D determináns α_k értékétől függetlenül zérus értéket vesz fel, mert a determináns második sorának minden eleméből kiemelhető a k szorzó, ill. az első oszlop minden eleméből ugyanígy kiemelhető a $(k - 1)$ szorzó. Az (1.3.95) feltétel fenti formájában a $k = 0$ és $k = 1$ esetekben így éppen a "valódi" sajátrezgések vizsgálatát teszi lehetetlenné. Ha azonban kiejtjük a második sorból a k , ill. az első oszlopból a $(k-1)$ szorzót, megszüntetjük a merevtest-szerű mozgások hatását, és lehetővé válik a "valódi" sajátrezgések frekvenciáinak meghatározása.

A fenti értelemben módosított (1.3.95)-öt teljesítő $\alpha_{k,\ell}$ az értékekből számíthatók a héj sajátkörfrekvenciái és a peremfeltételeket teljesítő lengésalakok és igénybevételek.

A forgásparaboloid-héj sajátkörfrekvenciái a $\alpha_{k,\ell}$ -ből az alábbi levezetés alapján számíthatók.

Az (1.3.81)-ből az (1.3.90) behelyettesítésével:

$$\frac{1}{l_k^4} = \frac{\alpha_{k\ell}^4}{a^4} = \frac{\rho t \omega_{k\ell}^2}{K} - \frac{Et}{KR^2},$$

ω^2 -re rendezve, K képletét behelyettesítve:

$$\omega_{k\ell}^2 = \frac{\alpha_{k\ell}^4 K}{a^4 \rho t} + \frac{E}{\rho R^2} = \frac{\alpha_{k\ell}^4 Et^2}{a^4 12(1-\nu^2)\rho} + \frac{E}{\rho R^2},$$

figyelembe véve (1.3.22)-t:

$$\omega_{k\ell} = \sqrt{\frac{\alpha_{k\ell}^4 Et^2}{a^4 12(1-\nu^2)\rho} + \frac{E}{\rho R^2}} = \sqrt{\frac{\alpha_{k\ell}^4 c^2 t^2}{a^4 12(1-\nu^2)} + \frac{c^2}{R^2}} = \omega_0 \sqrt{\frac{\alpha_{k\ell}^4 J_{stat}^4}{a^4} + 1}, \quad (1.3.96)$$

ahol:

$$\omega_0 = \frac{c}{R}. \quad (1.3.97)$$

Az (1.3.96) összefüggés $R = \infty$ esetén formálisan a sík körlemez (1.3.42) képletévé egyszerűsödik.

A forgásparaboloid-héj körfrekvencia kifejezése formálisan azonos a rugalmas ágyazású lemezével (Soedel (1986)), azonban a két szerkezet frekvencia képletében szereplő $\alpha_{k\ell}$ -ek természetesen eltérőek. A rugalmas ágyazású lemez $\alpha_{k\ell}$ sajátértékei az (1.3.36) másodrendű determináns zérushelyeiből, a forgásparaboloid-héj sajátértékei pedig az (1.3.95b) negyedrendű determináns zérushelyeiből származnak.

Amennyiben az (1.3.79), ill. az (1.3.80) egyenletben szereplő négyzetgyök alatti kifejezés negatív értékű, akkor az (1.3.81) képlettel definiált lengési karakterisztikus hossz nem értelmezhető valós hosszúságként. Bevezetve a

$$\xi_k = \frac{r}{\sqrt{i}l_k} \quad (1.3.98)$$

változótranszformációt, a lengésalakokat a

$$A_k(\xi_k) = C_5 \text{ber}_k \xi_k + C_6 \text{bei}_k \xi_k + C_7 \text{kei}_k \xi_k + C_8 \text{ker}_k \xi_k \quad (1.3.99)$$

alakban kereshetjük. Az (1.3.99) szerint feltételezett saját-lengésalak a ber_k , bei_k , kei_k , ker_k úgynevezett k -adrendű Thomson-féle függvényeket tartalmazza. Ezek voltaképpen a képzetes rendszámú Bessel-féle differenciálegyenlet komplex argumentumú és komplex értékű megoldásfüggvényeinek valós és képzetes része alapján származtatott valós változójú és valós értékű függvények. Közülük a mérnöki feladatokban gyakrabban előforduló nulladrendű ($k=0$ indexű) függvények pl. a rugalmasan ágyazott körlemezek körszimmetrikus megoldásaiban játszanak szerepet (Márkus (1964)). A zérus index elhagyásával ezeket egyszerűen Thomson-féle függvényeknek szokták nevezni.

Az l_k lengési karakterisztikus hossz képzetessé válásának a lehetősége tehát azzal a kényelmetlenséggel fenyeget, hogy a lengésvizsgálat teljessé tétele érdekében az (1.3.95) frekvencia-egyenlet kifejezéseit (1.3.99)-nek megfelelően át kell alakítani. A numerikus vizsgálatok során olyan matematikai programcsomagot használtam (MATLAB), mely a komplex argumentumú Bessel-függvények alkalmazását is lehetővé tette. Ebből következően nem volt szükség az (1.3.95) Thomson függvényekkel való felépítésére.

Az l_k lengési karakterisztikus hossz akkor vált képzetesből valósra (1.3.81) szerint, ha $l_{stat} = l_\omega$. Az ehhez tartozó körfrekvencia az alábbi módon számítható:

$$\frac{\rho t \omega^2}{K} = \frac{Et}{KR^2} \quad \rightarrow \quad \omega^2 = \frac{E}{\rho R^2} \quad \rightarrow \quad \omega^* = \frac{c}{R}$$

A fenti gondolatmenetből következik, hogy a váltás az (1.3.97)-ben megadott ω_0 -nál következik be, tehát $\omega^* = \omega_0$, mely valós lengési karakterisztikus hossz esetén a sajátkörfrekvenciák alsó korlátja.

A sajátfrekvenciák ismeretében egy adott k, ℓ móduszhoz az elmozdulási alakfüggvény egyszerűen előállítható. Az (1.3.88) lehajlásfüggvény 3 független együtthatót, (C_2, C_5, C_6) tartalmaz, ezek meghatározásához 3 egyenlet szükséges.

Az (1.3.95) egyenletrendszer 4 egyenletéből tetszőleges módon válasszunk ki kettőt, mely tartalmazza a C_i , $i = \{2, 5, 6\}$ együtthatókat. Tegyük hozzájuk a $\xi_k = \alpha_k$ peremen az egységnyi elmozdulást kifejező

$$w_k = \frac{1}{R_k^2} [4C_2(k+1)\alpha_{k,\ell}^k - C_5 J_k(\alpha_{k,\ell}) + C_6 I_k(\alpha_{k,\ell})] = 1 \quad (1.3.100)$$

egyenletet. Az így előálló nonsinguláris együtthatómátrixú egyenletrendszerben a C_i , $i = \{2, 5, 6\}$ együtthatók jelentik az ismeretleneket. Ebből az egyenletrendszerből a fenti együtthatók számíthatók.

Figyelembe véve a gyűrűirányú változás függvényét is, a keresett rezgési elmozdulásfüggvény:

$$\phi_{k,\ell} = A_k(r, C_2, C_5, C_6) \cos k\vartheta, \quad (1.3.101)$$

mely a peremelmozdulásra normált.

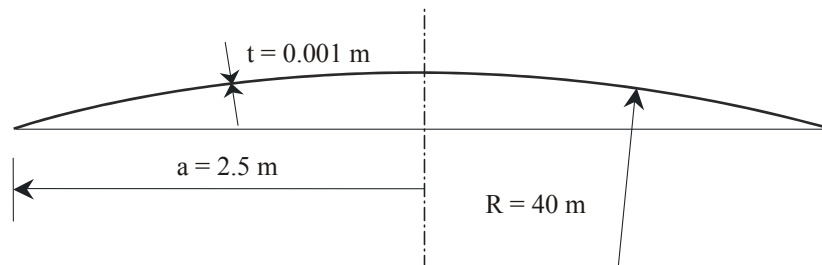
Rezgési alakfüggvényt úgy kapunk, hogy $\phi_{k,\ell}$ -hez hozzáadjuk a szerkezet alakját leíró $z = \frac{r^2}{2R}$ függvényt.

1.3.5. Mintapéldák

A fentiekben ismertetett analitikus számítási eljáráshoz MATLAB programot dolgoztam ki, melynek felhasználásával egy szabad peremű forgásparaboloid-héj és egy azonos alaprajzi méretű, vastagságú és anyagú szabad peremű ágyazatlan körlemez, valamint egy rugalmas ágyazású körlemez sajátrezgéseit számítottam. Ábrázoltam a jellegzetes elmozdulási alakokat és ezek metszeteit. Összehasonlítottam a háromféle szerkezet rezgéseit. Vizsgáltam a geometriai jellemzők változásának hatását a forgásparaboloid-héj sajátfrekvenciáira.

1.3.5.1. A forgásparaboloid-héj sajátfrekvenciái és rezgési elmozdulásai

A forgásparaboloid-héj sajátrezgéseit egy úrszerkezetként alkalmazható, szabadon lebegő 1.3.3. ábra szerinti tányérantenna esetén vizsgáltam.



1.3.3. ábra: A vizsgált héjszerkezet geometriai adatai

A héj anyaga alumíniumötvözet. A figyelembe vett anyagjellemzők:

- rugalmassági modulus: $E_s = 70 \text{ kN/mm}^2$;
- testsűrűség: $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$;
- Poisson tényező: $\nu = 1/3$.

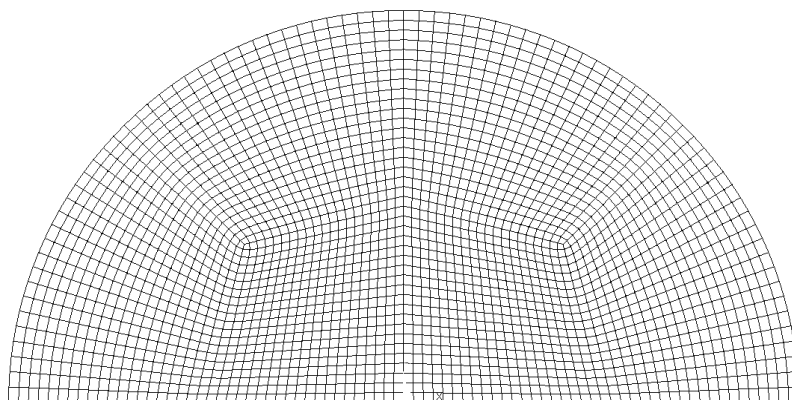
A kidolgozott MATLAB programmal meghatároztam a vizsgált héjszerkezet sajátkőrfrekvenciáit. Ellenőrzésképpen végeelem módszerrel - az ANSYS programmal - is elvégeztem a számítást. A rezgési elmozdulások szimmetria tulajdonságát kihasználva fél gömbsüveg-héjat és körlemezeket modelleztem poláris rendszerben, nyolccsomópontos héjelemekre felosztva. A végeelem programmal meghatározott első 14 sajátkőrfrekvencia jó egyezést mutatott az analitikus számításból kapott megfelelő értékekkel.

1.3.2. táblázat: Az alternatív módszerekkel kapott sajátkőrfrekvenciák (ω) összehasonlítása.

k	ℓ	Analitikus [Hz]	módusz sorsz.	ANSYS [Hz]
2	0	1.39	4	1.41
3	0	3.37	5	3.41
4	0	6.06	6	6.12
5	0	9.44	7	9.52
6	0	13.45	8	13.56
7	0	18.06	9	18.19
8	0	23.24	10	23.39
9	0	28.95	11	29.11
10	0	35.17	12	35.33
11	0	41.86	13	42.03
12	0	49.03	14	49.19
13	0	56.65	15	56.80
14	0	64.72	15	64.85
15	0	73.24	17	73.34

A táblázatban k a gyűrűirányú hullámszámot, ℓ a rezgési alakok gyűrűirányú csomóvonalainak számát jelenti.

Az ANSYS modell (1.3.4. ábra) 2400 db nyolccsomópontos shell93 típusú elemet tartalmazott. A modell az ANSYS 10-es verziójával készült.



1.3.4. ábra: Az ANSYS modell.

Az 1.3.3. ábra szerinti forgásparaboloid-héj analitikus úton számított rezgési sajátértékeit az 1.3.3a-b táblázatban, a sajátkőrfrekvenciáit az 1.3.3d-e táblázatban foglaltam össze.

1.3.3a táblázat: Forgáspároloid-héj $\alpha_{k,\ell}$ sajátértékei (1 mm vastagság)

	$k=0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell=0$	-	-	15.974+ 15.974-i	15.972+ 15.972-i	15.966+ 15.966-i	15.953+ 15.953-i	15.661+ 15.661-i	14.447+ 14.447-i
1	3.01	4.53	5.93	7.26	8.54	9.78	15.67	21.35
2	6.21	7.74	9.19	10.58	11.93	13.24	19.50	25.48
3	9.37	10.91	12.38	13.81	15.20	16.55	23.04	29.21
4	12.53	14.07	15.56	17.01	18.42	19.81	26.45	32.77
5	15.67	17.22	18.72	20.19	21.62	23.03	29.79	36.24
10	31.40	32.96	34.49	35.99	37.48	38.95	46.06	52.89

1.3.3b táblázat: Forgáspároloid-héj $\alpha_{k,\ell}$ sajátértékei (1 mm vastagság)

	$k=16$	17	18	19	20	21	22	23
$\ell=0$	13.958+ 13.958-i	13.310+ 13.310-i	12.411+ 12.411-i	11.044+ 11.044-i	8.285+ 8.285-i	12.889	16.838	19.345

1.3.3c táblázat: Forgáspároloid-héj $\alpha_{k,\ell}$ sajátértékei (10 mm vastagság)

	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7
$\ell=0$	-	-	5.037+ 5.037-i	4.972+ 4.972-i	4.794+ 4.794-i	4.372+ 4.372-i	3.034+ 3.034-i	6.150

1.3.3d táblázat: Forgáspároloid-héj $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciái [Hz] (1 mm vastagság).

	$k=0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell=0$	-	-	1.39	3.37	6.06	9.44	35.17	73.24
1	127.31	127.40	127.60	127.97	128.59	129.51	141.25	170.64
2	127.66	128.17	129.02	130.32	132.14	134.59	158.76	205.97
3	129.16	130.71	132.91	135.89	139.72	144.48	183.65	248.01
4	133.17	136.53	140.89	146.31	152.86	160.56	215.98	296.60
5	141.28	147.23	154.43	162.90	172.63	183.59	255.35	351.38
10	276.89	299.31	321.48	347.30	372.78	399.19	544.24	709.25

1.3.3e táblázat: Forgáspároloid-héj $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciái [Hz] (1 mm vastagság).

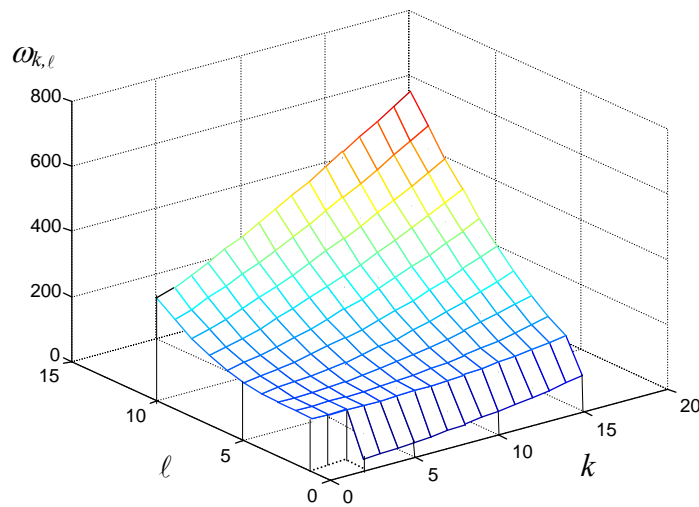
	$k=16$	17	18	19	20	21	22	23
$\ell=0$	82.20	91.61	101.48	111.80	122.60	133.86	145.61	157.85
$\ell=1$	179.06	188.36	198.52	209.53	221.37	234.02	247.46	261.68

1.3.3f táblázat: Forgáspároloid-héj $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciái [Hz] (10 mm vastagság).

	$k=0$	1	2	3	4	5	6	7
$\ell=0$	-	-	13.50	31.57	55.25	84.32	118.72	158.44
$\ell=1$	129.29	137.19	154.66	183.20	222.56	271.74	329.69	395.60

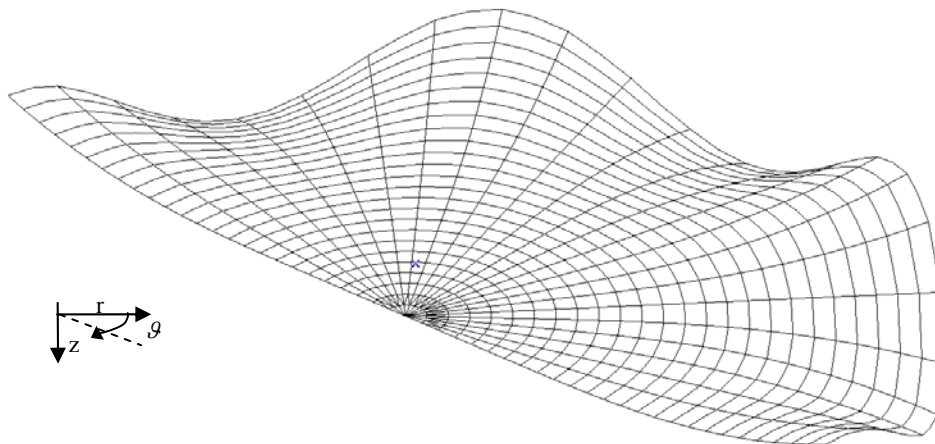
Az 1 mm vastagságú héj esetén az 1.3.3a-b táblázatok $\ell = 0$ sora a $k = 20$ oszlopig komplex, míg $k = 21$ -től valós $\alpha_{k,\ell}$ értékeket tartalmaz. Természetesen e sajátértékek komplex voltának nincs köze a csillapításhoz, hiszen az (1.3.2) egyensúlyi egyenlet nem tartalmaz csillapítási tagokat. Az l_k hossz $k = 21$ -től válik valóssá (1.3.3b táblázat), azaz $l_{stat} > l_\omega$ teljesül és az 1.3.4.4. fejezet szerint a hozzátartozó sajátkőrfrekvencia meghaladja az $\omega_o = c/R$ értékét, mely esetünkben 127.29Hz (1.3.3e táblázat). Minél vastagabb a héj, a fenti váltás annál kisebb k -nál következik be. Ha pl. azonos kialakítás mellett a héj vastagsága 10 mm lenne, akkor a sajátértékek $k = 7$ -től kezdődően lennének valósak (1.3.3c és 1.3.3f táblázat).

Az 1.3.3d táblázat értékeit a k és ℓ paraméterek függvényében grafikusan is ábrázoltam (1.3.5. ábra). Természetesen a grafikon csak k és ℓ diszkrét értékeire vonatkozik.



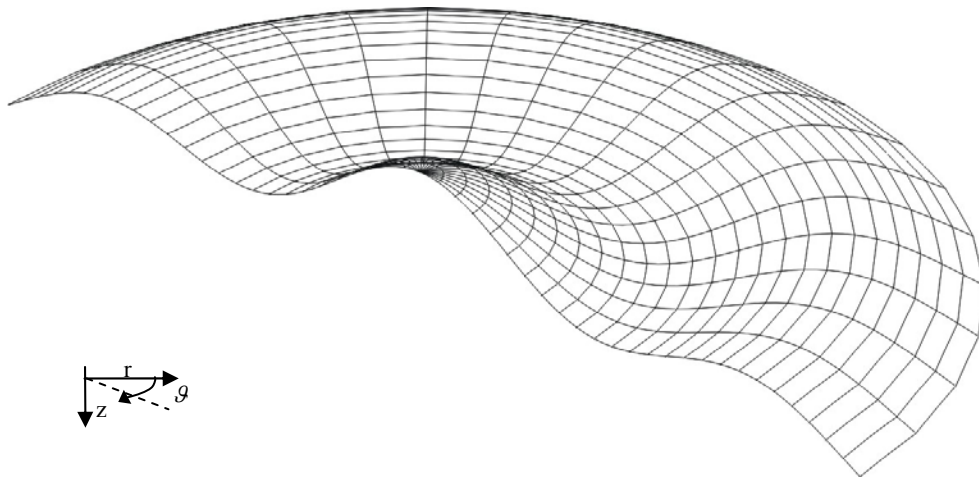
1.3.5. ábra: Forgáspároloid-héj $\omega_{k,\ell}$ sajátkőrfrekvenciái [Hz].

Az 1.3.6 – 1.3.8. ábrákon a forgáspároloid-héj néhány jellegzetes módusza látható. Az 1.3.6. ábra egy az 1.3.3. táblázatok $\ell = 0$ sorához tartozó elmozdulás-alakot mutat. Az ábrán gyűrűirányú hullámzást figyelhetünk meg. A héj csúcsponja helyben marad, a hullámhegyeket és a hullámvölgyeket sugárirányú csomóvonalak (zérusvonalak) választják el.



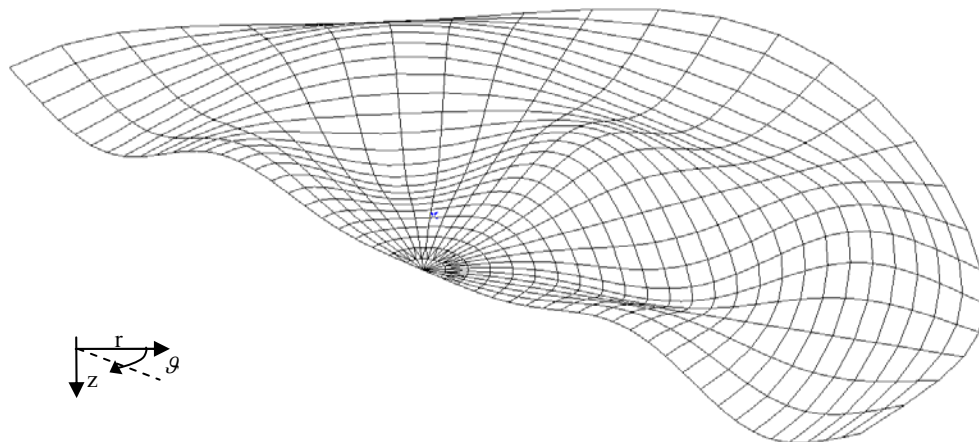
1.3.6. ábra: Forgáspároloid-héj rezgési elmozdulás-alakja $\ell = 0$ és $k = 6$ paraméterre

Az 1.3.7. ábrán egy a $k = 0$ oszlophoz tartozó rezgési elmozdulás-alak látható. Az előző ábrával ellentétben itt nem gyűrűirányú, hanem sugárirányú hullámzást figyelhetünk meg.



1.3.7. ábra: Forgáspároloid-héj rezgési elmozdulás-alakja $\ell = 3$ és $k = 0$ paraméterre

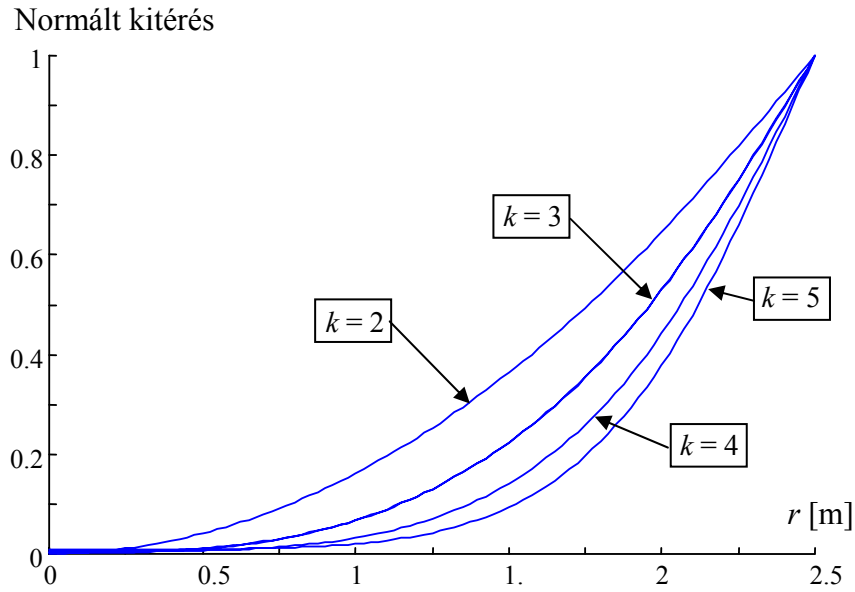
Az 1.3.8. ábrán egy $\ell \neq 0$ és $k \neq 0$ módusz látható. A rezgési elmozdulás-alak mind gyűrű-, mind sugárirányban hullámzik. A héjszerkezet csúcspontja helyben marad.



1.3.8. ábra: Forgáspároloid-héj rezgési elmozdulás-alakja $\ell = 2$ és $k = 4$ paraméterre

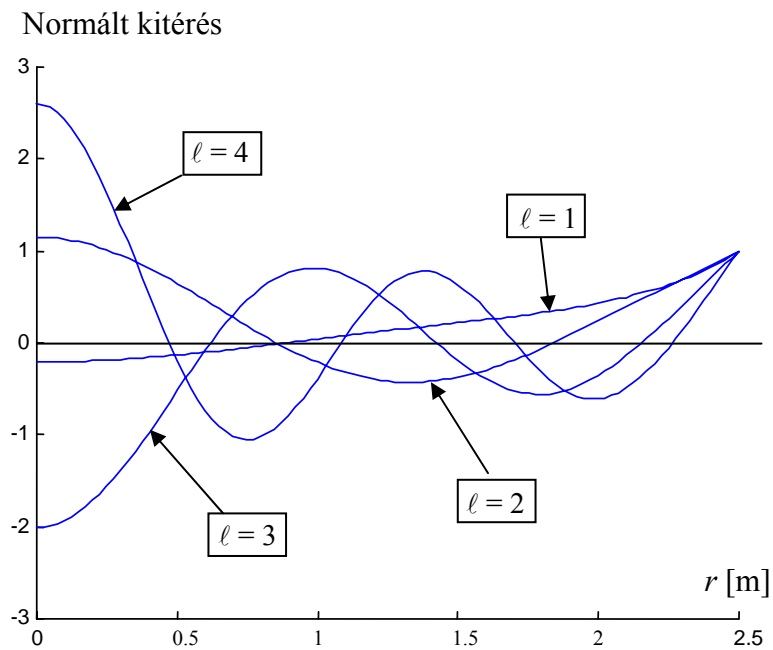
Az 1.3.6. és az 1.3.8. ábrákon a gyűrűirányú felosztást úgy választottam meg, hogy a sugárirányú csomóvonalak egyenes vonalként jelenjenek meg.

Az 1.3.9 ábra a forgáspároloid-héj $\ell = 0$ és $k = 2, 3, 4, 5$ paraméterű rezgési elmozdulás-alakjainak fél metszetét ábrázolja a peremeltolódásra normálva, ott, ahol $\cos k\theta = 1$. Az $r = 0$ abszcisszájú pont a héj csúcspontja. Megfigyelhető, hogy a k növekedésével a rezgési elmozdulás-alak meridiánja a csúcspont környékén egyre laposabb és a pereméknél egyre meredekebb lesz.



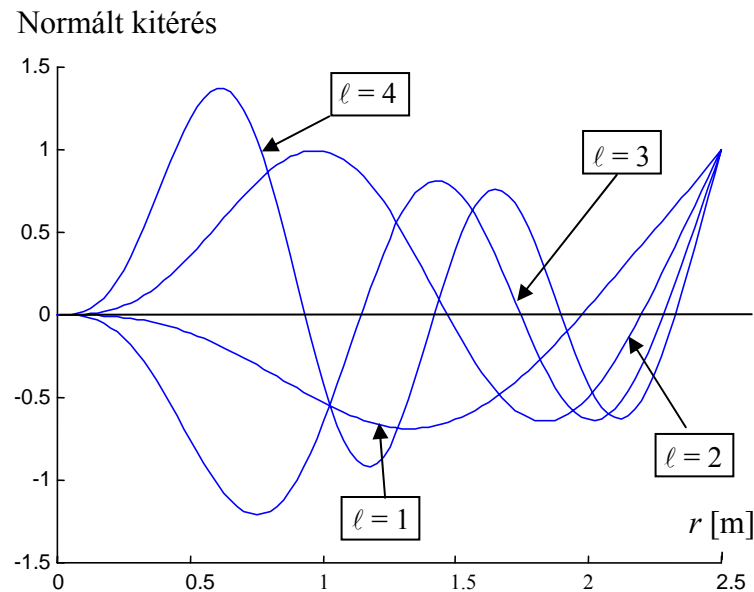
1.3.9. ábra: Forgásparaboloid-héj rezgési elmozdulás-alakjainak metszete $\ell = 0$ és $k = \{2, 3, 4, 5\}$ paraméterre.

Az 1.3.10. ábra a forgásparaboloid-héj azon rezgési elmozdulás-alakjainak fél metszetét mutatja, melynek paraméterei $k = 0$ és $\ell = \{1, 2, 3, 4\}$. Ezeket a móduszokat ugyancsak a peremeltolódásokra normáltam.



1.3.10. ábra: Forgásparaboloid-héj rezgési elmozdulás-alakjainak metszete $k = 0$ és $\ell = \{1, 2, 3, 4\}$ paraméterre.

Az 1.3.11. ábrán a $k=3$ és $\ell = \{1, 2, 3, 4\}$ paraméterű rezgési elmozdulás-alakok fél metszetét látjuk, ugyancsak $\cos k\vartheta = 1$ esetén. Ha $k > 0$ akkor a rezgési elmozdulás-alak ordinátája a csúcsponton zérus.



1.3.11. ábra: Forgásparaboloid-héj rezgési elmozdulás-alakjainak metszete $k=3$ és $\ell = \{1, 2, 3, 4\}$ paraméterre.

1.3.5.2. Forgásparaboloid-héj és a szabad peremű ágyazatlan körlemez

Az 1.3.3. ábra szerinti forgásparaboloid-héjből az $R = \infty$ választással származtatott ágyazatlan körlemez sajátkörfrekvenciáit a MATLAB programmal számítottam, melyeket az 1.3.4. táblázatban foglaltam össze. A sajátkörfrekvenciák közvetlenül is meghatározhatók az 1.3.1. táblázatból az (1.3.42) képlet segítségével.

1.3.4. táblázat: Ágyazatlan körlemez $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciái [Hz].

	$k=0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell=0$	-	-	1.31	3.05	5.36	8.23	30.76	66.53
1	2.26	5.12	8.79	13.20	18.30	24.06	62.37	115.71
2	9.61	14.93	21.04	27.91	35.50	43.78	95.24	162.60
3	21.90	29.68	38.24	47.56	57.60	68.37	132.51	213.10
4	39.13	49.37	60.38	72.14	84.64	97.87	174.53	268.00
5	61.28	73.98	87.44	101.65	116.61	132.30	221.38	327.56
10	245.90	270.89	296.64	323.13	350.37	378.35	529.15	697.73

Az 1.3.3d. és az 1.3.4. táblázatot összehasonlítva azt találjuk, hogy az $\ell = 0$ sorbeli értékek közel vannak egymáshoz. A forgásparaboloid-héj frekvenciái kicsit magasabbak, mert, ha csekély mértékben is, de érvényesül a membránmerevség. A héj $\ell = 0$ -hoz tartozó móduszaiban a membrán deformációk alárendelt szerepet játszanak, mely a rezgési alakok tanulmányozásával is belátható. Ezek a móduszok közel állnak az (1.3.56)-tal definiált (de

meg nem valósuló) nyúlásmentes alakváltozásokhoz. Az analitikusan meghatározott elmozdulás-alakok sugárirányú metszeteit kirajzoltatva ez közvetlenül is belátható. A móduszok gyűrűirányú hullámzásának fokozódásával a deformációk a héj peremközeli sávjában koncentrálnak és így az R gömbi görbületi sugár szerepe fokozatosan csökken.

Az 1.3.3d. és az 1.3.4. táblázat $\ell = 1$ sorában a sajátkörfrekvenciák között k kis értékeinél nagy az eltérés. Kis gyűrűirányú hullámszám esetén a forgásparaboloid-héj móduszaiban a membrán deformációk dominálnak. A gyűrűirányú hullámok szaporodása a hajlítási deformációt juttatja egyre nagyobb szerephez és ezért az 1.3.3d. ill. 1.3.4. táblázatbeli értékek – azonos sorokban növekvő k értékek mellett – %-osan csökkenő eltérést mutatnak.

Az $\ell > 1$ -hez tartozó móduszokban egyre jelentősebb a sugárirányú hajlítás szerepe. A táblázatok oszlopai mentén lefelé haladva megállapíthatjuk, hogy a forgásparaboloid-héj és az ágyazatlan körlemez sajátkörfrekvenciái egymáshoz tartanak. A táblázatokban az $\ell = 10$ és $k = 15$ paraméterekhez tartozó sajátkörfrekvenciák között már százalékosan minimális az eltérés.

1.3.5.3. Forgásparaboloid-héj és a rugalmasan ágyazott körlemez

Vizsgáltam a helyettesítő – (1.3.60) képletből számított, $C = 43.125 \text{ kN/m}^2/\text{m}$ ágyazási tényezőjű – rugalmasan ágyazott körlemez rezgéseit is.

Az 1.3.5. táblázatban a "helyettesítő rugalmasan ágyazott körlemez" MATLAB-bal számított sajátkörfrekvenciáit adtam meg. Az ágyazás a forgásparaboloid-héj membrán merevségét helyettesíti. Az 1.3.3d. és 1.3.5. táblázat összehasonlításával e helyettesítés jóságát ítélni tudjuk meg.

1.3.5. táblázat. Rugalmasan ágyazott körlemez $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciái [Hz].

	$k=0$	1	2	3	4	5	10	15
$\ell=0$	*127.29	*127.29	127.31	127.33	127.41	127.56	130.96	143.63
1	127.31	127.40	127.60	127.98	128.60	129.55	141.75	172.03
2	127.66	128.17	129.02	130.32	132.15	134.61	158.98	206.50
3	129.16	130.71	132.91	135.89	139.72	144.49	183.75	248.23
4	133.17	136.53	140.89	146.31	152.87	160.57	216.02	296.70
5	141.28	147.23	154.43	162.90	172.63	183.59	255.37	351.43
10	276.89	299.31	321.48	347.30	372.78	399.19	544.25	709.25

Az $\ell = 0$ -hoz tartozó móduszokban jelentős eltérés tapasztalható. A rezgési alakok ugyan hasonlóak, mégis a rugalmasan ágyazott körlemez sajátkörfrekvenciái jóval magasabbak. Ennek oka az, hogy míg a forgásparaboloid-héj – a membrán merevséget csak csekély mértékben juttatva szerephez – alapvetően hajlító rezgéseket végez, addig az ágyazott körlemez esetén a - membrán merevséget helyettesítő – Winkler-ágyazat rugóiban tekintélyes rezgési energia tárolódik. A forgásparaboloid-héj $\ell = 0$ móduszaiban az első néhány k -hoz komplex $\alpha_{k,\ell}$ tartozik. Matematikailag ez a magyarázata annak, hogy ezekben a móduszokban forgásparaboloid-héj esetén miért adódhat kisebb sajátkörfrekvencia az (1.3.97) fiktív ágyazás által képviselt értéknél, mely esetünkben $\omega_o = 127.29\text{Hz}$.

Az $\ell = 0$ sorban a *-gal jelölt helyeken a rugalmasan ágyazott körlemez merevtestszerű mozgásaihoz tartozó sajátkörfrekvenciák szerepelnek. Ezek a rezgési állapotok a rugalmas ágyazás, mint külső kényszer, révén jöhetnek létre. A lemez vagy önmagával párhuzamos eltolódásokat ($k = 0$), vagy valamely tetszőleges átmérője körül

billegő mozgásokat ($k = 1$) végezhet. A merevtestszerű mozgások közben a lemez nem vesz fel alakváltozási energiát, tehát a sajátkörfrekvenciát a rugómerevség alapján, elemi úton számíthatjuk. Az (1.3.97)-ből számított ω_0 a rugalmasan ágyazott körlemez sajátkörfrekvenciáinak alsó korlátja és egyúttal torlódási pontja.

Az $\ell > 1$ móduszokban a forgásparaboloid-héj és a rugalmasan ágyazott körlemez sajátkörfrekvenciái között %-o-nél kisebb az eltérés. Ezekben az esetekben a rugalmasan ágyazott körlemez valóban jó helyettesítő szerkezet.

1.3.5.4. Az összehasonlításokból levonható következtetések

A forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálatából megállapítható, hogy az $\ell = 0$ és az $\ell > 0$ móduszok alapvetően különböznek egymástól. Az előbbiek közelítően nyúlásmentes deformációt, az utóbbiak - kis ℓ és k paraméterek mellett - döntően membrán deformációt képviselnek. Ezzel összhangban *Rayleigh (1945)* is a héjszerkezetek sajátrezgéseinek két csoportját különböztette meg.

A *Soedel (1986)* megállapítása szerint, a rugalmasan ágyazott körlemez modell közelítően minden módusz esetében alkalmazható a forgásparaboloid-héj rezgés-számításához. Végeselemes futtatásokkal *Pluzsik (2000)* megállapította, hogy a rugalmas ágyazású lemezzel való közelítés a legalacsonyabb frekvenciáknál hibás eredményt ad.

Az analitikus számításokból a vizsgált három szerkezetfajta különböző móduszaira kapott sajátfrekvenciák (1.3.3d., 1.3.4., 1.3.5. táblázat) összevetésével megállapítható, hogy a forgásparaboloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó ($\ell = 0$) rezgéseinek sajátfrekvenciái az ágyazatlan körlemezzel, míg az egy vagy több gyűrűirányú csomóvonalat tartalmazó rezgések frekvenciái a rugalmas ágyazású körlemezzel közelíthetők.

Csuklós és befogott perem esetén az itt tárgyalt, a peremek fodrozódását mutató közelítőleg nyúlásmentes $\ell = 0$ móduszok nem tudnak kialakulni.

1.3.5.5. A geometriai jellemzők hatása a forgásparaboloid-héj rezgéseire

A továbbiakban azt vizsgáltam, hogy a geometriai jellemzők, az alapkör a sugara, az R gömbi görbületi sugár, valamint a t héjvastagság hogyan befolyásolják a forgásparaboloid-héj sajátrezgéseit.

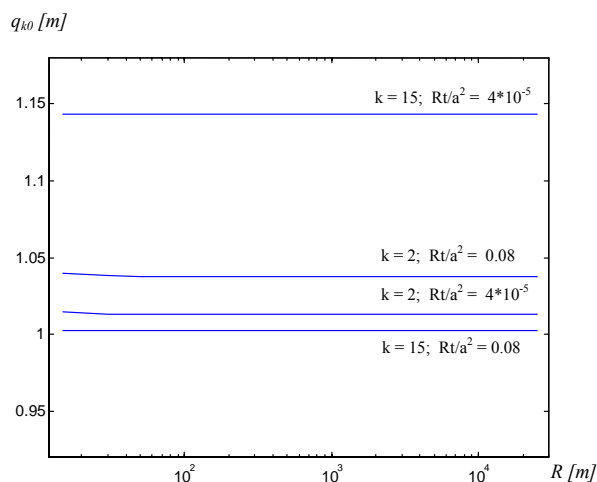
A 1.3.5.4 fejezet eredményeire támaszkodva szétválasztottam az $\ell = 0$ és $\ell > 0$ móduszokat. Az $\ell = 0$ közelítőleg nyúlásmentes móduszok sajátfrekvenciáit az ágyazatlan körlemez sajátfrekvenciáival vetettem össze.

A forgásparaboloid-héj és a körlemez $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciáiból az alábbi hányadost képeztem:

$$q_{k,0} = \frac{\omega_{k,0,par}(a, R, t, k)}{\omega_{k,0,kör}(a, t, k)}. \quad (1.3.102)$$

Tekintettel arra, hogy, – rögzített ℓ esetén is – a forgásparaboloid-héj sajátkörfrekvenciáiban a geometriai jellemzők és a k gyűrűirányú hullámszám együttesen négy változót jelent, megkíséreltem ezek számának csökkentését. A sajátérték kereső eljárás segítségével azt találtam, hogy a geometriai jellemzők egyesíthetők az Rt/a^2 dimenziótlan paraméterben. Próba-futtatásokból megállapítottam egyrészt, hogy az Rt/a^2 tört tetszőleges konstanssal való bővítésével szemben az $\omega_{k,0,par}$ közel invariáns, ezért elegendő az R/a ill. t/a változását vizsgálni. Megállapítottam másrészt, hogy konstans Rt szorzat mellett az R és t egymással fordítottan arányos változtatása az $\omega_{k,\ell,par}$ tényezők értékét csak kis mértékben befolyásolja.

Az 1.3.12. ábra a $q_{k,0}(R)$ függvényeket tartalmaz, két különböző k , és két különböző Rt szorzat kombinációira vonatkoztatva. Az a értéke az 1.3.3. ábra szerinti 2.5 m. Az R gömbi sugár - melyet logaritmikus léptékében tüntettem fel - vizsgált tartománya: $R = \{4a, \dots, 800a\}$ volt. A konstansról csak csekély eltérés tapasztalható $k = 2$ mellett kis R esetén.



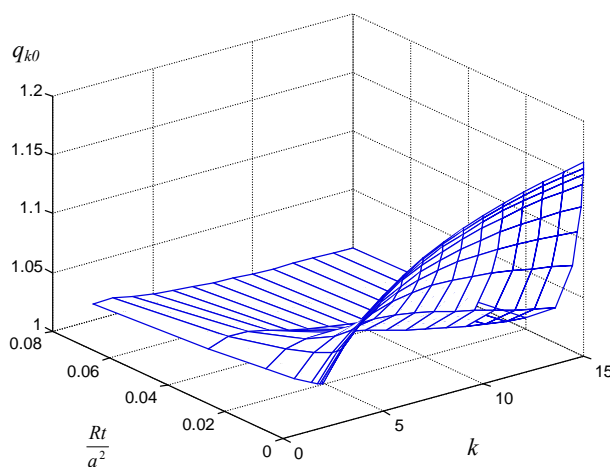
1.3.12. ábra: Az $q_{k,0}$ tényezők függése R -től konstans Rt szorzat esetén.

A 1.3.12. ábra tanúsága szerint a fenti $q_{k,0}$ hányados kétváltozós függvényre redukálható:

$$q_{k,0} = \frac{\omega_{k,0,par}\left(\frac{Rt}{a^2}, k\right)}{\omega_{k,0,kör}(a, t, k)} \quad (1.3.103)$$

Az (1.3.103) az $\ell = 0$ móduszokban a helyettesítő ágyazatlan körlemez alkalmazhatóságát mutatja.

E kétváltozós függvény axonometrikus grafikonját az 1.3.13. ábrában adtam meg az $\ell = 0$ esetre, a $k = \{1, \dots, 15\}$ és $Rt/a^2 = \{4 \cdot 10^{-5}, \dots, 0.08\}$ tartományon. A grafikon a k paraméter tekintetében diszkrét értékekre vonatkozik.



1.3.13. ábra: A forgásparaboloid-héj és a körlemez $\omega_{k,\ell}$ sajátkörfrekvenciáinak hányadosa

1.4. FORGÁSPARABOLOID-HÉJ SAJÁTREZGÉSEI A NYÍRÁSI ALAKVÁLTOZÁSOK FIGYELEMBEVÉTELÉVEL

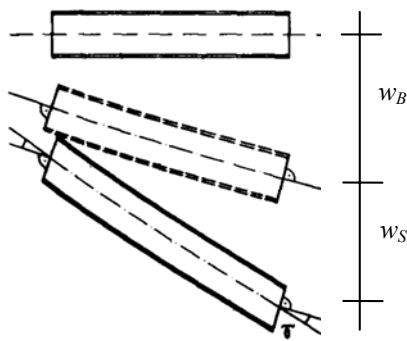
A 1.3. fejezetben a forgásparaboloid-héjat a nyírási alakváltozások elhanyagolásával, azaz végtelen nagy nyírási merevség feltételezésével vizsgáltam. Ez az elhanyagolás a 1.3.3. ábra szerinti szerkezetnél biztosan helytálló, mert a szerkezet anyaga homogén és a vastagsága több nagyságrenddel kisebb, mint a görbületi sugara, vagy az alapkörének sugara. Ha a héj nyírási alakváltozása nem hanyagolható el, mert a vastagsága jelentős, vagy, mert olyan szendvics szerkezetű, ahol a mag nyírási merevsége kicsiny, akkor az (1.3.2) - (1.3.3) alapegyenleteket módosítani kell. Ez a módosítás a Thimoszenko-rudak, vékony vagy vastaghéjalású szendvicsszerkezeteknél (*Allen (1969)*) alkalmazott megoldással, az alakváltozásnak és a tehernek nyírási és hajlítási összetevőre való felbontásával végezhető el.

1.4.1. A nyírási alakváltozás alapösszefüggései

Közelítésként a felület lehajlása mind matematikailag, mind fizikailag két részre bontható fel (*Hegedűs (1979)*):

$$w = w_B + w_S, \quad (1.4.1)$$

ahol: w_B a hajlításból, w_S a nyírási alakváltozásból származó lehajlás (1.4.1 ábra).



1.4.1. ábra: A hajlításból és a nyírásból származó lehajlás

Ha minden merevségi jellemző állandó a felület mentén, akkor a lehajlás és a felületre merőleges teher kapcsolata:

$$K\Delta\Delta w_B + K_L\Delta\Delta w_S = p, \quad (1.4.2)$$

ahol: K a szendvics teljes hajlítási merevsége, K_L a héjalások saját hajlítómerevségének összege. Bevezetve a $K_0 = K - K_L$ jelölést a fenti differenciálegyenlet így írható:

$$K_0\Delta\Delta w_B + K_L\Delta\Delta w = p_B + p_S = p. \quad (1.4.3)$$

Nyíró-igénybevételt csak a $p_B = K_0 \Delta w_B$ teher okoz, ezért a mag nyírási deformációja is csak a p_B teherből származó Q_B nyíróerő következménye. Valamely t normálvektorú metszetben a Q_B nyíróerő:

$$Q_{B,t} = -K_0 \frac{\partial}{\partial t} (\Delta w_B). \quad (1.4.4)$$

A w_S lehajlás a szerkezet nyírási alakváltozásából – szögtorzulásából – származik, ezért a w_S lehajlásfüggvény t irányú első deriváltja megegyezik a γ_{zt} szögtorzulással:

$$\gamma_{zt} = \frac{Q_{B,t}}{S}, \quad (1.4.5)$$

ahol: S a teljes szerkezet effektív nyírási merevsége, továbbá:

$$\frac{\partial w_S}{\partial t} = \frac{Q_{B,t}}{S}. \quad (1.4.6)$$

Az (1.4.4) és (1.4.6)-ból t szerint integrálással és az integrációs konstans mellőzésével adódik a w_B és w_S kapcsolata a következőképpen:

$$w_S = -\frac{K_0}{S} \Delta w_B. \quad (1.4.7)$$

Az (1.4.1), (1.4.2) és (1.4.7) a hajlított vastaghéjalású szendvicsek alapegyenletei. Ebből a vékonyhéjalású szendvicsekre vonatkozó összefüggések a $K_L = 0$ és $K_\theta = K$ helyettesítéssel nyerhetők.

1.4.2. A képzőfüggvényes módszer alkalmazása

A továbbiakban vastag homogén anyagú felületszerkezet rezgését vizsgálom, mely viselkedését tekintve a Timoshenko-rudakkal mutat rokonságot. Ekkor a $K_L = 0$, és így a teljes hajlítási merevség: $K = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} = K_0$.

Alkalmazva az (1.4.1) szerinti felbontást, a héj szabad rezgéseit leíró (1.3.66) differenciálegyenlet-rendszer a következőképpen módosul:

$$\begin{bmatrix} K\Delta\Delta - \rho t \omega^2 & -\rho t \omega^2 & -\frac{1}{R}\Delta \\ \frac{1}{R}\Delta & \frac{1}{R}\Delta & \frac{1}{Et}\Delta\Delta \\ K\Delta\Delta & S\Delta & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_B \\ w_S \\ F \end{bmatrix} = \underline{0}, \quad (1.4.8)$$

ahol: az egyetlen rétegből kialakított t vastagságú, homogén, E rugalmassági modulusú héj esetén az S nyírási merevség a korábban bevezetett jelölések alkalmazásával:

$$S = \frac{\rho_s E}{2(1+\nu)} t = \rho_s G t, \quad \text{ahol: } \rho_s = 1.2. \quad (1.4.9)$$

Az (1.4.8) differenciálegyenlet-rendszer megoldásához ismét a képzőfüggvényes eljárást alkalmazom. Ehhez elő kell állítani az (1.4.8) operátormátrixának determinánsát:

$$\det(\Theta_s) = \frac{KS}{Et} \Delta^5 - \left(\frac{K}{R^2} - \frac{K\rho\omega^2}{E} \right) \Delta^4 - \left(\frac{S\rho\omega^2}{E} - \frac{S}{R^2} \right) \Delta^3 \quad (1.4.10)$$

és adjungáltjának transzponáltját:

$$\text{adj}(\Theta_s)' = \begin{bmatrix} -\frac{S}{Et} \Delta\Delta\Delta & \frac{K}{Et} \Delta\Delta\Delta\Delta & \left(\frac{S}{R} - \frac{K\Delta}{R} \right) \Delta\Delta \\ -\frac{S}{R} \Delta\Delta & \frac{K}{R} \Delta\Delta\Delta & (\rho\omega^2 S - \rho\omega^2 K\Delta - SK\Delta\Delta) \Delta \\ -\left(\frac{\rho\omega^2}{E} - \frac{1}{R^2} \right) \Delta\Delta & \left(\left(\frac{\rho\omega^2}{E} - \frac{1}{R^2} \right) - \frac{K}{Et} \Delta\Delta \right) \Delta\Delta & \frac{K}{R} \Delta\Delta\Delta \end{bmatrix}. \quad (1.4.11)$$

Az operátormátrix adjungáltjának minden eleme tartalmaz legalább egy Δ operátort, ezért az (1.4.10)-ből kifaktorizálható. A keresett képzőfüggvény karakterisztikus differenciálegyenlete ennek megfelelően az alábbi:

$$\frac{KS}{Et} \Delta\Delta \left[\Delta\Delta + \left(\frac{\rho\omega^2}{S} - \frac{Et}{SR^2} \right) \Delta - \left(\frac{\rho\omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \right) \right] H_k = 0. \quad (1.4.12)$$

A Δ -ban elsőfokú tag – a $\frac{K}{S}$ tényező kiemelésével – alábbi

$$\left(\frac{\rho\omega^2}{S} - \frac{Et}{SR^2} \right) \Delta = \left(\frac{\rho\omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \right) \frac{K}{S} \Delta \quad (1.4.13)$$

átalakítása mutatja a nyírási alakváltozás nélküli esethez való átmenetet. A nyírási alakváltozás elhanyagolása formálisan a felületszerkezet S nyírási merevségének végtelenhez tartását jelenti. Ezzel a fenti tag zérushoz tart és így visszakapjuk a nyírási deformáció nélküli (1.3.66) differenciálegyenletet.

A továbbiakban a 1.3. fejezet szerinti megoldás módszerét követve alakítsuk szorzattá e másodfokú kifejezést. Ehhez alkalmazzuk a már korábban bevezetett jelöléseket:

$$\frac{1}{l_k^4} = \frac{1}{l_\omega^4} - \frac{1}{l_{stat}^4} = \frac{\rho\omega^2}{K} - \frac{Et}{KR^2} \quad (1.4.14)$$

Ennek felhasználásával az (1.4.12) differenciálegyenlet :

$$\frac{KS}{Et} \Delta \Delta \left[\Delta \Delta + \frac{1}{l_k^4} \frac{K}{S} \Delta - \frac{1}{l_k^4} \right] H_k = 0 \quad (1.4.15)$$

A szögletes zárójelben lévő kifejezés szorzattá alakításához bevezetve az l_k -ből származtatható alábbi l_1 és l_2 hosszakat:

$$l_1 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{K^2}{4l_k^8 S^2} + \frac{1}{l_k^4} + \frac{K}{2l_k^4 S}}}}, \quad (1.4.16)$$

$$l_2 = \frac{1}{\sqrt{\sqrt{\frac{K^2}{4l_k^8 S^2} + \frac{1}{l_k^4} - \frac{K}{2l_k^4 S}}}}. \quad (1.4.17)$$

A nyírási alakváltozásokkal kiegészített rezgési probléma karakterisztikus egyenlete (1.3.72)-hoz hasonló, de eltérő karakterisztikus hosszakkal:

$$\frac{KS}{Et} \Delta \Delta \left[\Delta + \frac{1}{l_1^2} \right] \cdot \left[\Delta - \frac{1}{l_2^2} \right] H_k = 0. \quad (1.4.18)$$

A változók szétválasztásával:

$$\frac{KS}{Et} \Delta \Delta \left[\Delta + \frac{1}{l_1^2} \right] \cdot \left[\Delta - \frac{1}{l_2^2} \right] [A_k(r) \cos k\vartheta] = 0. \quad (1.4.19)$$

A fenti differenciálegyenlet általános megoldása is három részből tevődik össze. Az $A_k^{(1)}$ megoldása már ismert a 1.3.4.3 fejezetből, mint az (1.3.78) általános megoldása. A másik két megoldáscsoport:

$$A_k^{(2)} = C_{5k} J_k \left(\frac{r}{l_1} \right) + C_{7k} N_k \left(\frac{r}{l_1} \right), \quad (1.4.20)$$

$$A_k^{(3)} = C_{6k} I_k \left(\frac{r}{l_2} \right) + C_{8k} K_k \left(\frac{r}{l_2} \right). \quad (1.4.21)$$

A megoldásból a csúcsponthi szingularitások kizárása miatt az (1.3.85)-hoz hasonlóan csak négy tag marad meg. Az $A_k^{(1)}$ megoldásfüggvényekben számítástechnikai megfontolásokból továbbra is a $\frac{r}{l_k}$ változót használjuk:

$$H_k = \left[C_{1k} \left(\frac{r}{l_k} \right)^k + C_{2k} \left(\frac{r}{l_k} \right)^{k+2} + C_{5k} J_k \left(\frac{r}{l_1} \right) + C_{6k} I_k \left(\frac{r}{l_2} \right) \right] \cos k\vartheta. \quad (1.4.22)$$

Legyen ismét a második sor a generáló sor. Ebből a második sorból emeljük ki a közös Δ operátorszorzót, valamint az S nyírási merevséget:

$$\begin{aligned} \text{adj}(\Theta_S)_2' &= S\Delta \left[-\frac{1}{R}\Delta \quad \frac{K}{SR}\Delta\Delta \quad \left(\rho t \omega^2 - \rho t \omega^2 \frac{K}{S}\Delta - K\Delta\Delta \right) \right] = \\ &= S\Delta \left[-\frac{1}{R}\Delta \quad \frac{K}{SR}\Delta\Delta \quad K \left(\frac{1}{I_\omega^4} - \frac{K}{SI_\omega^4}\Delta - \Delta\Delta \right) \right]. \end{aligned} \quad (1.4.23)$$

Az (1.4.22) képzőfüggvény és az (1.4.23) transzponált, adjungált operátor mátrix segítségével állítsuk elő a $w_B(r, \vartheta)$ és $w_S(r, \vartheta)$ lehajlás függvényt és az $F(r, \vartheta)$ feszültségfüggvényt. Ennek alapján a megoldások:

$$\begin{aligned} w_B &= -\frac{1}{R}\Delta H_k, \\ w_S &= \frac{K}{SR}\Delta\Delta H_k, \end{aligned} \quad (1.4.24)$$

$$F = K \left(\frac{1}{I_\omega^4} - \frac{K}{SI_\omega^4}\Delta - \Delta\Delta \right) H_k.$$

A fenti operációkat a négytagú $H_k(r, \vartheta)$ függvényen végrehajtva és az (1.3.87) azonosságokat is felhasználva, MATLAB segítségével előállítottam az (1.4.24) megoldásfüggvények polárkoordinátás alakját.

A szabad peremű forgásparaboloid-héj vizsgálatához a nyírási alakváltozások figyelembevétele mellett is alkalmazhatók a szabad peremre vonatkozó feltételek (1.3.6), (1.3.8), (1.3.13) és (1.3.14) szerinti megfogalmazása. Az M_r radiális hajlító- és $M_{r,\vartheta}$ csavarónyomatékokból és a T_r peremerőkből konstruált (1.3.8) és (1.3.14) peremfeltételekben a csak a w_B lehajlások szerepelnek. A w_S nyírási deformációk csak a feszültségfüggvénnyel kifejezett (1.3.6), (1.3.13) peremfeltételekben fordulnak elő.

Az $r = a$ peremre vonatkozó peremfeltételek alapján képzett egyenletrendszer együttható mátrixának első és második sorában szerepelnek az S nyírási merevséget tartalmazó tagok.

$$\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_5 \\ C_6 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.4.25)$$

A forgásparaboloid-héj frekvenciaegyenlete az együttható mátrix determinánsával:

$$\det(D(\alpha_k(\omega))) = 0, \quad (1.4.26)$$

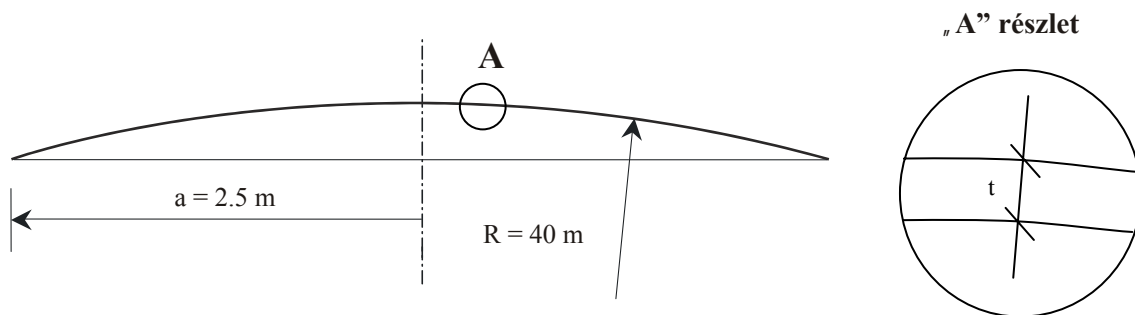
ahol az (1.3.95)-hez hasonlóan a nem-triviális megoldásokat szolgáltató ω értékek jelentik a sajátkőrfrekvenciákat. Az együttható mátrix 16 eleme az F2. függelékben található.

1.4.3. Mintapélda a nyírási alakváltozás figyelembevételével

A nyírási alakváltozás figyelembevételéhez is MATLAB programot készítettem. Ehhez a D determinánst az (1.4.1) felbontáshoz hasonlóan $D = D_B + D_S$ formában állítottam elő, a nyírási alakváltozás hatásának vizsgálatához.

Az 1.4.2 ábra szerinti homogén anyagú héjat három különböző – $t = \{3, 8, 15\}$ cm-es – vastagsággal vizsgáltam. A héj anyagjellemzői:

- rugalmassági modulus: $E_s = 70 \text{ kN/mm}^2$;
- testsűrűség: $\rho = 2700 \text{ kg/m}^3$;
- Poisson tényező: $\nu = 1/3$.



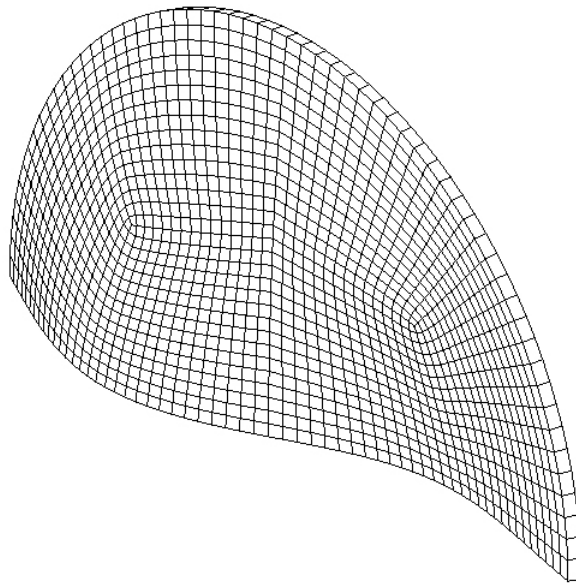
1.4.2. ábra: A vizsgált vastag héj

A 3 és 8 cm-es vastagság esetén a nyírási alakváltozás hatása csekély.

1.4.1 táblázat: Sajátkőrfrekvenciák a nyírási alakváltozás figyelembevételével 15 cm vastag héj esetén.

k	ℓ	Analitikus nyírás nélkül [Hz]	Analitikus nyírással [Hz]	Ansys [Hz]
2	0	196.60	196.39	195.48
5	0	1235.42	1225.43	1206.08
0	1	362.61	361.92	360.41
0	2	1446.47	1428.41	1418.39
0	3	3287.94	3189.73	3149.89
5	3	10256.00	9348.20	9334.55
0	5	4634.04	4315.41	4303.05
5	5	10001.40	8650.87	
0	10	18587.85	14532.69	
5	10	28599.91	20306.57	

Az 1.4.1. táblázat első két oszlopában megadtam az analitikus számításból származó sajátkörfrekvenciákat a 15 cm (abnormális) vastagságú héjra nyírási alakváltozás nélkül és annak figyelembevételével. A harmadik oszlopban összehasonlításképpen az ANSYS programból kapott eredmények láthatók. Az ANSYS modell 2400 db shell93 elemből épült fel, mely a nyírási alakváltozást figyelembe veszi. A táblázati értékek azt mutatják, hogy a tányérantenna gyakorlati szempontból célszerű kialakításnál még több nagyságrenddel vastagabb héj esetében sem játszanak a nyírási alakváltozások számottevő szerepet alacsonyabb k és ℓ paraméter esetén. Hasonlóan a gerendák rezgésénél megfigyeltekhez, a különbség csak a magasabb sorszámú móduszok esetén válik érzékelhetővé és nemcsak a vastag, hanem a vékonyabb héjak esetében is.



1.4.3. ábra: Vastag héj $k = 1$ és $\ell = 1$ paraméterű sajátrezgési alakja.

1.5. Függelék

1.5. F1. Függelék

A frekvenciaegyenlet együttható mátrixa a nyírási alakváltozások elhanyagolásával:

$$D_{11} = \frac{K}{l_\omega^4} (k^2 - k) \alpha_k^{k-2},$$

$$D_{12} = \frac{K}{l_\omega^4} (k^2 - k - 2) \alpha_k^k,$$

$$D_{13} = \frac{K}{l_{stat}^4} \left[-\frac{(k - k^2)}{\alpha_k^2} J_k(\alpha_k) + \frac{1}{\alpha_k} J_{k+1}(\alpha_k) \right],$$

$$D_{14} = -\frac{K}{l_{stat}^4} \left[\frac{(k^2 - k)}{\alpha_k^2} I_k(\alpha_k) + \frac{1}{\alpha_k} I_{k+1}(\alpha_k) \right],$$

$$D_{21} = \frac{K}{l_\omega^4} (k^2 - k) \alpha_k^{k-2},$$

$$D_{22} = K \left[\frac{1}{l_\omega^4} (k^2 + k) - \frac{4(1-\nu)}{R^2 a^2} (k^3 - k) \right] \alpha_k^k,$$

$$D_{23} = K \left(\frac{1}{l_{stat}^4} + \frac{(1-\nu)}{R^2 l_k^2} \right) \left[\frac{k^2 - k}{\alpha_k^2} J_k(\alpha_k) - \frac{k}{\alpha_k} J_{k+1}(\alpha_k) \right],$$

$$D_{24} = K \left(\frac{1}{l_{stat}^4} - \frac{(1-\nu)}{R^2 l_k^2} \right) \left[\frac{k^2 - k}{\alpha_k^2} I_k(\alpha_k) + \frac{k}{\alpha_k} I_{k+1}(\alpha_k) \right],$$

$$D_{31} = 0,$$

$$D_{32} = \frac{4(1-\nu)}{Ra^2} (k^3 - k) \alpha_k^k,$$

$$D_{33} = -\frac{1}{Ra^2} \left\{ [(1-\nu)(k^2 - k) - \alpha_k^2] J_k(\alpha_k) + (1-\nu) \alpha_k J_{k+1}(\alpha_k) \right\},$$

$$D_{34} = \frac{1}{Ra^2} \left\{ [(1-\nu)(k^2 - k) + \alpha_k^2] I_k(\alpha_k) - (1-\nu) \alpha_k I_{k+1}(\alpha_k) \right\},$$

$$D_{41} = 0,$$

$$D_{42} = -\frac{4K(1-\nu)}{Ra^2} (k^4 - k^2) \alpha_k^{k-1},$$

$$D_{43} = \frac{1}{Ra^2} \left\{ \left[\frac{(1-\nu)(k^3 - k^2)}{\alpha_k} + k\alpha_k \right] J_k(\alpha_k) - [(1-\nu)k^2 + \alpha_k^2] J_{k+1}(\alpha_k) \right\},$$

$$D_{44} = \frac{1}{Ra^2} \left\{ - \left[\frac{(1-\nu)(k^3 - k^2)}{\alpha_k} - k\alpha_k \right] I_k(\alpha_k) - [(1-\nu)k^2 - \alpha_k^2] I_{k+1}(\alpha_k) \right\}.$$

1.5. F2. Függelék

A frekvenciaegyenlet együttható mátrixa a nyírási alakváltozások figyelembevételével:

$$D_{11} = \frac{K}{a^2 l_\omega^4} (k^2 - k) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k,$$

$$D_{12} = \frac{K}{l_\omega^4} (k^2 - k - 2) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k + \frac{4K}{Sa^2 l_\omega^4 l_k^2} k (k^2 - 1) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k,$$

$$D_{13} = \left(-\frac{K(l_\omega^4 - l_1^4)}{a^2 l_\omega^4 l_1^4} + \frac{K}{Sa^2 l_\omega^4 l_1^2} \right) \left(\frac{a}{l_1} J_{k+1} \left(\frac{a}{l_1} \right) + (k-1) k J_k \left(\frac{a}{l_1} \right) \right),$$

$$D_{14} = \left(-\frac{K(l_\omega^4 - l_2^4)}{a^2 l_\omega^4 l_2^4} + \frac{K}{Sa^2 l_\omega^4 l_2^2} \right) \left(-\frac{a}{l_2} I_{k+1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + (k-1) k I_k \left(\frac{a}{l_2} \right) \right),$$

$$D_{21} = \frac{K}{a^2 l_\omega^4} (k^2 - k) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k,$$

$$D_{22} = -K \left(\frac{a}{l_k} \right)^k \left(-\frac{k^2 + k}{l_\omega^4 l_k^2} + \frac{4(1-\nu)}{R^2 a^2 l_k^2} (k^3 - k) \right) - \frac{4K}{Sa^2 l_\omega^4 l_k^2} k (k^2 - 1) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k,$$

$$D_{2,3} = -K \left(\frac{a}{l_k} \right)^k \left(-\frac{k^2 + k}{l_\omega^4 l_k^2} + \frac{4(1-\nu)}{R^2 a^2 l_k^2} (k^3 - k) \right) + \frac{Kk}{Sa^2 l_\omega^4 l_1^3} \left(-J_{k+1} \left(\frac{a}{l_1} \right) + (k-1) l_1 J_k \left(\frac{a}{l_1} \right) \right),$$

$$D_{24} = -\frac{K}{a^2 l_\omega^4 l_2^4} \left(I_k \left(\frac{a}{l_2} \right) (k-1) + \frac{a}{l_2} I_{k+1} \left(\frac{a}{l_2} \right) \right) \left(l_\omega^4 - l_2^4 + \frac{l_2^2}{R^2} l_\omega^4 \nu - \frac{l_2^2}{R^2} l_\omega^4 \right) +$$

$$+ \frac{Kk}{Sa^2 l_\omega^4 l_2^3} \left(I_{k+1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + (k-1) l_2 I_k \left(\frac{a}{l_2} \right) \right),$$

$$D_{31} = 0,$$

$$D_{32} = \frac{4K}{a^2 R^2 l_k^4} (1 - k^2) (1 - \nu) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k,$$

$$D_{33} = -\frac{K}{a^2 l_1^4 R} \left(J_k \left(\frac{a}{l_1} \right) \left(a^2 + kl_1^2 - k^2 l_1^2 + \nu l_1 a - \nu k l_1^2 + \nu k^2 l_1^2 \right) + a l_1 J_{k+1} \left(\frac{a}{l_1} \right) \right),$$

$$D_{34} = \frac{K}{a^2 l_2^4 R} \left(I_k \left(\frac{a}{l_2} \right) \left(a^2 + kl_2^2 - k^2 l_2^2 + \nu l_2 a - \nu k l_2^2 + \nu k^2 l_2^2 \right) + a l_2 I_{k+1} \left(\frac{a}{l_2} \right) \right),$$

$$D_{41} = 0,$$

$$D_{42} = -\frac{4K}{a^3 R l_k^4} (1-k^2)(1-\nu) \left(\frac{a}{l_k} \right)^k,$$

$$D_{43} = -\frac{K}{l_1^5 R} \left(-J_{k+1} \left(\frac{a}{l_1} \right) + \frac{kl_1}{a} J_k \left(\frac{a}{l_1} \right) \right) + \frac{K(\nu-1)k^2}{a^3 l_1^3 R} \left(-a J_{k+1} \left(\frac{a}{l_1} \right) + (k-1) l_1 J_k \left(\frac{a}{l_1} \right) \right),$$

$$D_{44} = -\frac{K}{l_2^5 R} \left(I_{k+1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + \frac{kl_2}{a} I_k \left(\frac{a}{l_2} \right) \right) - \frac{K(\nu-1)k^2}{a^3 l_2^3 R} \left(a I_{k+1} \left(\frac{a}{l_2} \right) + (k-1) l_2 I_k \left(\frac{a}{l_2} \right) \right).$$

2. Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgéseinek numerikus és kísérleti vizsgálata

JELÖLÉSEK

x	rúdtengely irányú koordináta,
$\{\phi\}$	a rezgési alak vektora,
t	az idő független változója,
$w(x,t)$	gerenda tengelyére merőleges elmozdulás,
$p(x,t)$	gerjesztő teher,
ρ	rúd anyagának sűrűsége,
E	rugalmassági modulus,
G	nyírési modulus,
ν	Poisson-tényező,
c	viszkózus csillapítási együttható
c_s	a keresztmetszeten belüli nyúlás-sebességekkel arányos csillapítási tényező.
ζ	a kritikus csillapítás százaléka,
$\zeta^{(EC)}$	az EUROCODE szerinti alakváltozás és repedéstágasság számításában használt tényező,
A	keresztmetszeti terület,
kA	effektív nyírt keresztmetszet,
m	hosszegységre vonatkoztatott fajlagos tömeg,
$I_{i,I}$	az ideális keresztmetszet I. feszültségállapot szerinti inercianyomatéka,
$I_{i,II}$	az ideális keresztmetszet II. feszültségállapot szerinti inercianyomatéka,
I_g	görbületi inercianyomaték,
S_d	a keresztmetszet dolgozó részének statikai nyomatéka a semleges tengelyre,
r	inerciasugár,
T	periódusidő,
ω	sajátkörfrekvencia,
f	sajátfrekvencia,
n	osztásszám,
i,k,m	módusz sorszáma,
l	gerenda hossza,
h	gerendaelem hossza,
$[K]$	merevségi mátrix,
$[M]$	tömegmátrix,
$[C]$	csillapítási mátrix,
F	hajlékonysági mátrix,
N	normálerő,
M	hajlítónyomaték,
Q	nyíróerő,
P_f	feszítőerő,
q	hosszmentén megoszló teher,
e, k	feszítőerő külpontosságai,
g, κ	görbület
σ_b	a nyomott szélső szálban lévő betonfeszültség
ε_b	a nyomott szélső szálban lévő összenyomódás,
\mathfrak{I}	impulzus,
$W(t)$	ablakfüggvény.

2.1. BEVEZETÉS

Az utóbbi két évtizedben számos publikáció jelent meg, melyek szerzői a szerkezetek károsodásának mértékét, esetleg helyét is a dinamikai viselkedésük alapján próbálják meghatározni.

A berepedt vasbeton- és feszített betongerendák dinamikai viselkedését jelentős mértékben befolyásolják a korábbi terhekből származott repedések. Kísérleti tapasztalatok azt mutatják, hogy a repedések jelenléte miatt a rezgés jellemzői eltérnek a jól ismert lineáris számítási modell által szolgáltatott eredményektől. Ennek oka lehet a repedések periodikus jellegű megnyílása és záródása miatti merevség-ingadozás, továbbá a nagyobb igénybevételek (hajlítónyomatékok) miatti esetleges fizikai nemlinearitás. Az előbbi hatás nemlineáris rezgést eredményez még akkor is, ha a rezgés folyamán az igénybevételek szintje végig az arányossági határon belül van. A nemlineáris rezgés esetén csak úgynevezett látszólagos sajátfrekvencia értelmezhető.

Az értekezésemben főként azt vizsgálom, hogy a repedezettség, pontosabban a repedések periodikus jellegű záródása hogyan befolyásolja a kéttámaszú vasbeton anyagú gerendák rezgési jellemzőit. Ennek keretében felhasználtam korábbi laboratóriumi kísérletek eredményeit, valamint számítási modelleket dolgoztam ki a kísérletek numerikus modellezésére.

A nemlineáris viselkedés numerikus modellezéséhez időlépéses algoritmust használtam, mely a kísérletekhez hasonlóan idősorokat, azaz keresztmetszeti eltolódásokat szolgáltatott az idő függvényében. A rezgés frekvenciatartalmának meghatározásához mozgóablakkal kombinált diszkrét Fourier-transzformációt alkalmaztam.

2.1.1. Célkitűzések

A disszertáció 2. fejezetében a kéttámaszú vasbeton- és feszített betongerendák rezgésének a repedezettségből származó nemlineáris jellegének vizsgálatát tűztem ki célul. Ennek részletei az alábbiak:

- Számítási modell kidolgozása a berepedt vasbetongerendák lineáris és nemlineáris vizsgálatára.
- A számítási modellhez számítógépi algoritmus készítése.
- Lineáris és nemlineáris vizsgálatok végzése berepedt vasbetongerendákon.
- Berepedt vasbetongerendák korábbi modellkísérleteiben, a spektrumokban az első sajátfrekvencia helyén kettős csúcs, azaz két közeli sajátfrekvencia adódott. A kidolgozott számítási modellel magyarázat keresése a fenti jelenségre.
- A berepedt gerenda nemlineáris rezgése során a frekvenciaváltozás vizsgálata.
- Kísérletek és a különböző numerikus vizsgálatok eredményeinek összehasonlítása.
- Új közelítő lineáris modellek kidolgozása a látszólagos sajátfrekvenciák számítására.
- Lineáris és nemlineáris számítási modell kidolgozása berepedt feszített tartóra.
- A feszítőerő és a sajátfrekvencia kapcsolatának vizsgálata.

2.1.2. Szakirodalmi áttekintés

Fontosabb mérnöki létesítmények így a hidak tervezett élettartama általában 50-75 év. Ez alatt az idő alatt a szerkezeteket bizonyos valószínűséggel a rendeltetészerű használatból származó igénybevételeket meghaladó hatások is érhetik (pl. földrengés, extrém szélteher, az esetleges nem rendeltetészerű használatból adódó túlterhelés). Problémák adódhatnak a

használati körülmények megváltozásából, vagy a fenntartási munkák elhanyagolásából is. A fentiek a tartószerkezeti elemek kisebb-nagyobb mértékű károsodásához vezethetnek.

Ebből következően világszerte nagy az érdeklődés a különböző szerkezeti károsodásokat detektáló és lokalizáló módszerek iránt, (pl.: *Forde és McCavitt (1993)*, *Wu és társai (2006)*, *Bastianini és társai (2005)*) és nemcsak az építőiparban, hanem a gépiparban, a repüléstechnikában is. A károsodások felderítésében jelenleg leggyakrabban használt, az egyszerű szemrevételezést meghaladó roncsolásmentes technikák:

- akusztikus vagy ultrahangos módszerek,
- remanens mágneses eljárás,
- radar alkalmazása,
- dinamikai vizsgálatok és az ezekre épülő identifikációs módszerek.

A disszertáció 2. fejezetének témája berepedt vasbetongerendák dinamikai vizsgálata. A berepedt gerendák rezgésével foglalkozó publikációkat többféleképpen is lehet csoportosítani. Az egyik lehetőség a lineáris és nemlineáris módszerek megkülönböztetése. Eszerint a publikációk egy része a rezgést mind a meghibásodás előtt, mind pedig utána közelítően lineárisnak tekinti, míg a publikációk másik része figyelembe veszi a meghibásodott gerenda nemlineáris viselkedését is. Megkülönböztetnek számítási modellek és mérési eredmények összehasonlítására, valamint tisztán mérésekre épülő módszereket.

A szerkezetek károsodásának vizsgálatában *Rytter (1993)* négy szintet különböztet meg:

1. szint: a károsodás jelenlétének megállapítása,
2. szint: a károsodás helyének megállapítása,
3. szint: a károsodás mértékének meghatározása,
4. szint: a szerkezet még meglévő élettartamának becslése.

A szerkezetek dinamikai vizsgálatával és modellezésével a vasbetonszerkezetek károsodásával kapcsolatban az első három szintnek megfelelő adatokhoz juthatunk. A negyedik szint inkább a törésmechanika és a fáradás vizsgálat területe.

A vasbetonszerkezetek repedezettségének dinamikai alapú főbb vizsgálati módszerei, a teljesség igénye nélkül, az alábbiak:

- sajátfrekvenciák megváltozásán alapuló módszerek,
- csillapítás megváltozásán alapuló módszerek,
- rezgési alakok megváltozásán alapuló módszerek,
- modális görbület megváltozásán alapuló módszerek,
- méréssel meghatározott hajlékonysági mátrix megváltozása.

A meghibásodások dinamikai vizsgálatának módszerei és ezek gyakorlati alkalmazásai a XX. század 70-es 80-as éveit követően indultak jelentősebb fejlődésnek. Ennek alapjául tengeri olajipari létesítmények vizsgálata szolgált (pl.: *Loland és Dodds (1976)*, *Wojnarowski és társai (1977)*, *Duggan és társai (1980)*). Sajnos az első alkalmazások nem voltak igazán sikeresek. A mérések közben számos kedvezőtlen környezeti hatással kellett megbirkózni. Gondot okozott a tengerszint, illetve a tárolt olaj mennyiségének ingadozásából származó tömegváltozás. A vízszint feletti mérésekből elsődlegesen rezonancia frekvenciákat lehetett meghatározni. A mérések többnyire csak a meghibásodás tényét jelezték.

2.1.2.1. Sajátfrekvenciák megváltozásán alapuló módszerek

A dinamikai alapú módszerekkel foglalkozó szakirodalom jelentős része a sajátfrekvenciák megváltozását vizsgálja. Ennek oka, hogy a szerkezet aktuális állapotától függő merevségének és modális tulajdonságainak szoros kapcsolata már régóta ismert.

Adams és Cawley (1978) módszert dolgozott ki kompozit gerendák repedéseinek vizsgálatára. A tartó különböző keresztmetszeteiben repedéseket feltételezve mindegyik esethez sajátfrekvenciákat számoltak, majd különböző (i, j) móduszokhoz a frekvenciák megváltozásából $\delta\omega_i / \delta\omega_j$ hányadosokat képeztek. Ezeket mérési eredményekkel hasonlították össze. A mért jellemzőktől a legkisebb eltérést mutató számítási eredmény kiválasztásával adják meg a repedés valószínű helyét. Több különböző helyen lévő repedés esetén a módszer sajnos nem használható.

Salawu és Williams (1993) négy különböző károsodást detektáló módszert hasonlított össze. Ezek egyike a sajátfrekvencia változásán, a többi identifikációs, illetve modelljavítási módszereken alapult.

Eccles és társai (1997) kísérletei során gerendamodelleket négy pontos terheléssel repesztettek meg. Az alacsonyfrekvencia 12%-al csökkent. A gerendákat később a várható törőteher 60%-, majd 80%-ig is terheltek, de ezután az alacsonyfrekvencia már csak további 2.5% -kal csökkent.

A sajátfrekvenciák megváltozásából többnyire csak a szerkezet károsodásának jelenlétére lehet következtetni, és egyes szerkezetfajták esetén durva becslést lehet adni annak mértékére. A repedés térbeli elhelyezkedésére vonatkozó információ ezekből a vizsgálatokból általában nem nyerhető.

2.1.2.2. Csillapítás megváltozásán alapuló módszerek

A szerkezetek meghibásodásának vizsgálatában a csillapítás változását is felhasználták. A csillapítás változásával, mint vizsgálati módszerrel kevesebb publikáció foglalkozik. Ennek oka, hogy a csillapítás és a szerkezet károsodásának kapcsolata nem mutat jó korrelációt, illetve a csillapításra alapozott identifikációs módszerek nem mutattak megfelelő pontosságot.

Farrar és Jauregui (1998) lemezes acéltartókat vizsgáltak, és azt találták, hogy a csillapítás érdemben nem függött a szerkezet károsodásának mértékétől. *Adams és társai (1975)* szálerekesztésű műanyag próbatestekkel kísérleteztek. A károsodás függvényében ki tudták mutatni a dinamikai merevség csökkenését és a csillapítás növekedését. *Casas és Aparicio (1994)* kisméretű gerendákat vizsgáltak és a károsodás mértéke és a csillapítás között a különböző móduszokban nem találtak egyértelmű összefüggést. *Salawu és Williams (1995)* vasbeton hídfelszerkezetet vizsgáltak szerkezeti javítás előtt és után. A csillapítás változásában nem tudtak egyértelmű trendet kimutatni.

Ndambi (2002) a részlegesen berepedt vasbetongerendák csillapítási mechanizmusát tanulmányozta. A csillapítást energetikai úton kívánta meghatározni. Ezen belül kétféle mechanizmussal foglalkozott: az egyik az alakváltozási energia átrendeződése a beton és az acél között a repedés megjelenése után; a másik a repedés határoló felületeinek súrlódása miatti energiaelnyelődés. A vasbeton gerenda csillapítási tényezője szempontjából a szerző ez utóbbi mechanizmust tartotta meghatározónak.

2.1.2.3. Rezgési alakok megváltozásán alapuló módszerek

A rezgési alakok vizsgálatával több információ szerezhető a károsodott szerkezetről, mint a sajátfrekvenciákra, illetve a csillapításra alapított módszereknél, és így már a repedés helye is jobban meghatározható.

Yuen (1985) a rezgési alakok és ezek merevségének megváltozását vizsgálta. Az állandó keresztmetszetű konzoltartóhoz végeeselemes modellt készített, melyen a repedéseket a hajlítómerevség változtatásával modellezte. Az elemeket egymás után repedtetni feltételezve számította az alábbi paramétereket:

$$\{\phi^*\}_i = \frac{\{\phi^d\}_i}{\omega_i^d} - \frac{\{\phi^u\}_i}{\omega_i^u}$$

$$\{\phi^*\}'_i = \frac{\{\phi^d\}'_i}{\omega_i^d} - \frac{\{\phi^u\}'_i}{\omega_i^u}$$

ahol: $\{\phi\}$ a rezgési alak vektora, i a vizsgált elem sorszáma, u index jelenti az eredeti, d a károsodott konfigurációt és (\prime) a hely-koordináta szerinti első deriváltat. Az így kapott $\{*\}$ -gal jelölt vektorokat összehasonlítva a mért adatokkal, következtetett a repedés helyére.

Rizos és társai (1990) a berepedt gerenda olyan analitikus modelljét fejlesztették ki, ahol a repedés két oldalán lévő keresztmetszet azonos a többi ép gerenda keresztmetszettel. E két keresztmetszet közötti kompatibilitási feltételt az alakváltozási energia segítségével állították elő. Ebből olyan, a sajátfrekvenciákra és a rezgési alakokra vonatkozó egyenletrendszert kaptak, melyben paraméterként szerepelt a repedés mérete és helye. A kísérletekben rezonanciát létrehozva két helyen mérték az amplitúdót. A repedés paramétereinek meghatározásához Newton-Rawson módszert alkalmaztak.

Penny és társai (1993) módszerükben a repedés legvalószínűbb elhelyezkedését adják meg. A károsodás különböző helyzetének feltételezésével számítások sorozatát végezték. Ezeket a mérési eredményekkel összevetve a legkisebb négyzetes eltérés alapján választották ki a repedés legvalószínűbb helyét.

Számos publikációban (*pl. Alampalli és Fu (1997)*) használják a MAC modális jellemzőt (MAC, azaz Modal Assurance Criterion), mely lényegében rezgési alakok normált skaláris szorzatát jelenti. Amennyiben a MAC-ot valamely szerkezet két, k és l rezgési alakjára alkalmazzuk, akkor ezek ortogonalitása miatt $k = l$ esetén értéke 1, ha $k \neq l$, akkor értéke 0. A sérülésmentes és a károsodott gerenda valamely j sorszámu rezgési alakjára alkalmazva a MAC jellemző (*West 1984*):

$$MAC = \frac{\left| \sum_{j=1}^n \phi_j \phi_j^* \right|^2}{\sum_j \phi_j^2 \sum_j \phi_j^{*2}}$$

ahol: n a modális koordináták száma, ϕ a nem sérült, ϕ^* a sérült szerkezet rezgési alakja. A MAC értéke 0 és 1 között változhat. Ha a MAC értéke 1, akkor a gerenda sérülésmentes, ha 1-nél kisebb, akkor sérülés valószínűsíthető, és mértékét az 1-től való eltérés jelzi.

A MAC-ből származtatható a COMAC nevű modális koordinátajellemző (COMAC, azaz Co-ordinate Modal Assurance Criterion), mely a MAC egyetlen modális koordinátára vonatkozó, de több móduszra kiterjesztett alakja

$$COMAC_j = \frac{\left| \sum_{i=1}^m \phi_{j,i} \phi_{j,i}^* \right|^2}{\sum_{i=1}^m \phi_{j,i}^2 \sum_{i=1}^m \phi_{j,i}^{*2}}$$

ahol: m a vizsgálatba bevont móduszok száma, j a vizsgált modális koordináta, i a rezgési alak (futó) sorszáma. Ha két mérési adat sorból képezett COMAC értékek 1-el egyenlők, akkor a két mérés között nem történt szerkezeti károsodás, Ha vannak 1-nél kisebb COMAC értékek,

akkor a legkisebb értékhez tartozó j index jelzi a meghibásodás legvalószínűbb helyét. *Kim és társai (1992)* összehasonlító elemzéseket végeztek a MAC és COMAC jellemzőkkel, valamint ezek további különböző variánsaival.

2.1.2.4. Modális görbületváltozáson alapuló módszerek

A rezgési alakoknál előnyösebben használhatók ezek második deriváltjai, a modális görbületek. A rezgési alakokban bekövetkező kis változásokat a kétszeri differenciálás jelentősen felnagyítja.

Pandey és társai (1991) az elsők között használták fel a modális görbületeket. A modális görbületet a rezgési alakfüggvényből a centrális differenciák módszerével számították:

$$\phi_{q,i}'' = \frac{\phi_{q-1,i} - 2\phi_{q,i} + \phi_{q+1,i}}{h^2}$$

ahol: q a szabadságfok (elmozduló csomópont) sorszáma, h az elemek hossza. Ha rendelkezésünkre áll mind az eredeti, mind a károsodott szerkezet i -edik rezgési alakja, akkor az i -edik módusz görbületváltozása a q helyen:

$$\Delta\phi_{q,i}'' = \phi_{q,i}^{*''} - \phi_{q,i}''$$

ahol továbbra is: ϕ a nem sérült, ϕ^* a sérült szerkezet rezgési alakja.

Stubs és társai (1992) olyan módszert dolgoztak ki, melyben két csomópont közötti alakváltozási energia változását vizsgálják. Egy lineárisan rugalmas gerenda esetén a p -ik elemre vonatkozó károsodási index a károsodott valamint az eredeti elembe felhalmozódott alakváltozási energiák hányadosával adható meg:

$$\beta_p = \left(\sum_{i=1}^m \mu_{ip}^d \right) / \left(\sum_{i=1}^m \mu_{ip}^u \right)$$

ahol: μ_{ip} a p -edik elembe a kísérlet vagy a számítási modell alapján az i -edik móduszban meghatározott alakváltozási energia, az u felső index az eredeti, a d a károsodott elemre vonatkozik.

A nyírési alakváltozásokat elhanyagolva a fenti alakváltozási energiák *Stubs és társai (1995)* szerint az alábbiak:

$$\mu_{ip}^u = \left(\int_a^b [\{\phi^u(x)\}_i'']^2 dx + \int_0^L [\{\phi^u(x)\}_i'']^2 dx \right) / \int_0^L [\{\phi^u(x)\}_i'']^2 dx$$

$$\mu_{ip}^d = \left(\int_a^b [\{\phi^d(x)\}_i'']^2 dx + \int_0^L [\{\phi^d(x)\}_i'']^2 dx \right) / \int_0^L [\{\phi^d(x)\}_i'']^2 dx$$

ahol: a és b a p -edik elem két határa, L a gerenda teljes hossza.

2.1.2.5. Hajlékonysági mátrix megváltozásán alapuló módszerek

Pandey és Biswas (1994) rezgési alakok kimérésével generáltak hajlékonysági mátrixot. Az alap gondolat a következő. Jelölje a szerkezet hajlékonysági mátrixát F az

eredeti és F^* a károsodott állapotában. Ha n db rezgési alakot mérünk ki m db pontban elhelyezett érzékelővel, akkor e mátrixok:

$$\mathbf{F}^* \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i^* \phi_i^{*T}$$

$$\mathbf{F} \approx \sum_{i=1}^n \frac{1}{\omega_i^2} \phi_i \phi_i^T$$

Az F és F^* mátrixok $m \times m$ méretűek. Mivel általában $n < m$, a fenti mátrixok szingulárisak. A hajlékonyság megváltozását a két mátrix különbsége adja:

$$\Delta F = F^* - F.$$

A ΔF mátrix oszlopaiból rendre kiválasztjuk a legnagyobb abszolút értékű elemet. Ezek k sorszámai, $1 \leq k \leq m$, utalnak károsodások esetleges helyére. Ha több oszlopban is ugyanazon a helyen találjuk a maximumot, akkor ott a legvalószínűbb a károsodás.

Toksoy és Aktan (1994) a módszert hídfelszerkezeten alkalmazták. Két mérés közötti elváltozást a bázis adatok nélkül is ki tudták mutatni.

A gyakorlatban csak az alacsonyabb sorszámú móduszokat szokták felhasználni, mivel a magasabb móduszok hatása a hajlékonysági mátrixra kisebb. Kedvező körülmény, hogy az alacsonyabb sorszámú rezgési alakok esetében a fizikai nemlinearitás kisebb szerepet játszik.

2.1.2.6. Számítási modell módosítása

A károsodások megkeresésének e módszere a szerkezet számítási modelljének (fokozatos) módosítására épül. Ez közelebbről a numerikus modellben szereplő merevségi -, csillapítási -, és tömegmátrixok megfelelő módosítását jelenti, azzal a célkitűzéssel, hogy a számított értékeket minél jobban megközelítsék a mérési eredményeket, melyek különféle dinamikai jellemzők. Szükség van tehát megfelelő numerikus – végeselemes, vagy differencia módszeren alapuló – számítási modell elkészítésére. Fel kell venni továbbá a károsodásokat jellemző paramétereket, melyek lehetnek támasz-, vagy elemmerevségek, vagy olyan függvények paraméterei, melyek egy több elemre kiterjedő károsodásból származó merevségcsökkenést fejeznek ki. A kísérleti és a számított eredmények közötti eltérés minimalizálásához valamilyen minimumkereső, vagy optimalizációs eljárással kell megkeresni a paraméterek megfelelő értékét. E módszerek általában lehetővé teszik nemcsak a károsodás helyének, hanem mértékének meghatározását is.

Az optimalizációs probléma többnyire Lagrange-multiplikátoros feladatként adott, melynek általános alakja

$$\min_{\Delta M, \Delta C, \Delta K} \{J(\Delta M, \Delta C, \Delta K) + \lambda R(\Delta M, \Delta C, \Delta K)\}$$

ahol: J a célfüggvény, R a kényszerfeltételeket tartalmazó függvény, λ a Lagrange-multiplikátor. E módszerekről áttekintést ad pl. *Zimmerman és Smith (1992)*, valamint *Hemez (1993)*.

2.1.2.7. Egyéb módszerek

Mint érdekesség megemlítendő, hogy az előző fejezetekben bemutatott módszereken túl az informatika legkorszerűbb eszközeit is, mint például a neurális hálózatokat és a genetikus algoritmusokat is, felhasználták a szerkezeti károsodások kimutatásához (*Carden és Fanning (2004)*).

A neurális hálózatok alkalmazása a neuronok viselkedésének tanulmányozásával indult el. A neurális hálózatok „tanuló” algoritmusok. Megfelelő tanítás révén képesek az input és output között összefüggéseket találni. Jól használhatók olyan problémák megoldásában, is – ahol tekintélyes adatbázis áll rendelkezésre, de nehezen található explicit algoritmus az összefüggések leírására. Károsodások identifikációjában használták (pl. *Yun és társai (2001)*).

A genetikus algoritmusok optimalizálásra használhatók. *Moslem és Nafaspour (2002)* eljárásukban a maradék erők segítségével megállapították a meghibásodás helyét, majd a következő lépésben genetikus algoritmus segítségével határozták meg a meghibásodás mértékét. A módszert 13 elemből álló rácsos tartón próbálták ki, melyből 3 elem volt károsodott.

2.2. AZ ALKALMAZOTT SZÁMÍTÁSI MÓDSZEREK

Ebben a fejezetben a vasbetongerendákon végzett numerikus vizsgálataimban alkalmazott lineáris és nemlineáris rezgésszámítási módszerek alapösszefüggéseit foglalom össze. Ennek tárgyalásánál célszerűen az alábbi eseteket lehet megkülönböztetni:

– A legegyszerűbb eset az állandó keresztmetszetű (merevségű) ideálisan rugalmas anyagú kéttámaszú gerenda rezgése. E lineáris rezgésnek a rezgési alakjai és sajátfrekvenciái közvetlenül számíthatók a gerenda - mint egydimenziós kontinuum - rezgését leíró állandó együtthatós differenciálegyenletéből.

– Amennyiben gerenda hajlítómerevsége a hossz mentén változik, akkor a változó együtthatós differenciálegyenlet megoldása helyett a gerenda hosszirányú finitizálására alapított numerikus módszereket alkalmazunk, azaz többszabadságfokú rendszert oldunk meg.

- Ha a gerenda hajlítómerevsége csak a hossz mentén változik, de időben állandó, akkor a rezgés továbbra is lineáris marad, így a rezgés frekvencia térben lineáris végeelem-, vagy differenciamódszer segítségével modellezhető.
- Ha a gerenda hajlítómerevsége nemcsak a hossz mentén, hanem időben is változik - pl. a gerenda be van repedve, vagy nagy rezgési amplitúdók miatt fizikai nemlinearitás is fennáll -, akkor nemlineáris rezgési problémával állunk szemben. Ebben az esetben a térbeli felosztás mellett még időbeli finitizálásra is szükség van. A problémát időtérben oldjuk meg valamelyik időlépéses algoritmus segítségével. A rezgés frekvenciataralma Fourier-transzformációval számítható.

Megjegyzendő, hogy lineáris rezgés is vizsgálható időtérben, mint kezdetiérték-feladat.

2.2.1. A rezgés differenciálegyenlete és az elemi számítás

Az általam használt, a differenciamódszerre alapított számítási eljárás a gerenda kontinuum-modelljéből származtatható. A kontinuum szabad rezgését leíró differenciálegyenlet (*Clough és Penzien (1975)*) – a nyírási alakváltozások és az elfordulási tehetetlenség figyelembevételével, valamint a csillapítás elhanyagolásával – az alábbi:

$$EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - mr^2 \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} - \frac{Emr^2}{kG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^2 \partial x^2} + \frac{m^2 r^2}{kAG} \frac{\partial^4 w}{\partial t^4} = 0, \quad (2.2.1)$$

ahol: x a rúdtengely irányú koordináta, $w(x,t)$ a gerenda tengelyére merőleges elmozdulás, E a rugalmassági modulus, G a nyírási modulus, A a keresztmetszeti terület, kA az effektív nyírt keresztmetszet, m a hosszegységre vonatkoztatott fajlagos tömeg, r az inerciasugár ($r^2=I/A$), I az inercianyomaték. Általános esetben $I = I(\kappa(t), x)$, ahol κ az időtől függő görbület.

A (2.2.1) differenciálegyenlet első két tagja az elemi hajlítási esetet képviseli, a harmadik tag a forgási tehetetlenséggel, a negyedik tag a nyírási deformációkkal az ötödik pedig a forgási tehetetlenség és a nyírási alakváltozás kombinációjával kapcsolatos. A (2.2.1) differenciálegyenletből a gerenda sajátfrekvenciái és rezgési alakjai határozhatók meg, a csillapítás elhanyagolása mellett.

Tekintettel arra, hogy csak az első két móduszt vizsgálom, ezért a modelltől a nyírási alakváltozás és az elfordulás hatását elhanyagolom (*Györgyi (2006)*).

A differenciálegyenletnek a gerjesztett rezgés esetén a nyírási deformációkat és a forgási tehetetlenséget elhanyagoló, de a csillapítást figyelembe vevő alakja (*Clough és Penzien (1975)*):

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + c_s I \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial t} \right) + c \frac{\partial w}{\partial t} + m \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = q(x,t), \quad (2.2.2)$$

ahol: c a viszkózus csillapítási együttható c_s a keresztmetszeten belüli nyúlás-sebességekkel arányos csillapítási tényező, $q(x,t)$ a gerjesztő teher.

Ha a differenciáloperátorok együtthatói konstansok, akkor differenciálegyenlet lineáris rezgést ír le. Ebben az esetben differenciálegyenlet állandó együtthatós és az x , t változók szétválasztásával oldható meg.

A csillapítatlan szabad, hajlító rezgés esetén a rezgési alakot leíró teljes megoldás:

$$w(x,t) = (C_1 \sin \alpha x + C_2 \cos \alpha x + C_3 \operatorname{sh} \alpha x + C_4 \operatorname{ch} \alpha x)(a_1 \sin \omega t + a_2 \cos \omega t).$$

Csuklós megtámasztás esetén $C_2 = C_3 = C_4 = 0$ és $\alpha = \frac{k\pi}{l}$, ahol: l a gerenda hossza (támaszköze).

A peremfeltételeket kielégítő nemtriviális megoldások alapján a sajátfrekvenciák (*pl: Timoshenko 1955*):

$$f_n = \frac{\pi}{2} \left(\frac{k}{l} \right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m}}, \quad (2.2.3)$$

ahol: EI a gerenda hajlítási merevsége az I. feszültségállapot szerint, m a hosszegység szerint fajlagosított tömege, k a módusz sorszáma. A rezgési alakok, azaz a gerenda móduszai:

$$\phi_k = A_k \sin \frac{k\pi x}{l}. \quad (2.2.4)$$

2.2.2. A többszabadságfokú rendszer

Repedezett zónában a gerenda hajlítási merevsége lecsökken. A hossz mentén változó keresztmetszeti jellemzők figyelembevételére a véges szabadságfokú rendszer alkalmas. A végtelen szabadságfokú kontinuumból véges szabadságfokú rendszerhez a gerenda hosszirányú felosztásával jutunk.

Tisztán viszkózus csillapítással a többszabadságfokú rendszer szokásos módon felírt D' Alembert-féle egyensúlyi egyenletrendszer:

$$[M]\ddot{u} + [C]\dot{u} + [K]u = F(t), \quad (2.2.5)$$

ahol: $[M]$ a tömeg-, $[C]$ a csillapítási-, $[K]$ a merevségi mátrix, $F(t)$ a gerjesztő erők-, u a csomóponti elmozdulások vektora. Az u vektor esetünkben a felosztott gerenda csomópontjainak függőleges w_i elmozdulásait tartalmazza.

A többszabadságfokú rendszer formálisan felírt (2.2.5) egyensúlyi egyenletében a $[M]$, $[C]$, $[K]$ együttható mátrixok többféle módon is előállíthatók. A leggyakrabban alkalmazott megközelítés a végeselem-, illetve a differenciámódszer. Variációs módszerek (virtuális elmozdulások tétele, Hamilton-elv) alkalmazásával a végeselem módszer szerinti megközelítéshez jutunk. A differenciálegyenletben szereplő differenciáloperátorokat a differenciahányadosokkal helyettesítve a differenciámódszer alapegyenletéhez jutunk.

Szabad rezgés esetén (2.2.5)-ben $F(t) = 0$. Az u elmozdulásvektort

$$u = \phi e^{i\omega t} \quad (2.2.6)$$

alakban feltételezve az alábbi komplex sajátérték-feladatra jutunk:

$$\left(-\omega^2[M] + i\omega[C] + [K]\right)\phi = 0, \quad (2.2.7)$$

ahol: ω a sajátkörfrekvenciákat (továbbiakban: sajátfrekvenciákat) ϕ a rezgési alakokat jelenti.

A gyakorlatban a többszabadságfokú rendszerek lineáris dinamikai számításaihoz a csillapítást úgy veszik fel, hogy a (2.2.7) az általánosított sajátérték-feladat megoldásához az $[M]$ -mel és a $[K]$ -val együtt diagonalizálható legyen a $[C]$ mátrix is.

A diagonalizálhatóság kritériumának legegyszerűbben úgy lehet eleget tenni, ha a csillapítási mátrixot vagy a merevségi-, vagy a tömegmátrixszal arányosan, vagy a kettő lineáris kombinációjával vesszük fel (2.2.8). Ennek előnye, hogy a csillapítás mechanizmusának pontos ismerete nélkül, de kísérleti tapasztalatok birtokában, különböző móduszokhoz különböző csillapításokat tudunk rendelni (*Clough és Penzien (1975)*).

$$[C] = a[K], \quad (2.2.8a)$$

$$[C] = b[M], \quad (2.2.8b)$$

$$[C] = a[K] + b[M]. \quad (2.2.8c)$$

A $[C]$ mátrix (2.2.8) szerinti megadását arányos csillapításnak, ezen belül a (2.2.8c) lineáris kombinációt Rayleigh csillapításnak nevezik. Rayleigh csillapítás esetén a két szabad együtthatóval (a , b) két móduszban választható meg ζ a csillapítási tényező.

Tegyük fel, hogy a k -ik és m -ik módusban ismerjük (pl. mérésből) a ζ_k és ζ_m csillapítási tényezőket, valamint a ω_k és ω_m sajátfrekvenciákat. A ϕ_k és ϕ_m rezgési alakokkal:

$$\begin{aligned}\phi_k^T (a[\mathbf{K}] + b[\mathbf{M}])\phi_k &= a + b\omega_k^2 = 2\omega_k\zeta_k, \\ \phi_m^T (a[\mathbf{K}] + b[\mathbf{M}])\phi_m &= a + b\omega_m^2 = 2\omega_m\zeta_m.\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

Felhasználva a rezgési alakok ortogonalitását (2.2.9) mátrixosan:

$$\frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1/\omega_k & \omega_k \\ 1/\omega_m & \omega_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_k \\ \zeta_m \end{bmatrix},\tag{2.2.10}$$

melyből az a és b konstansok meghatározhatók. Valamely k -tól és m -tól eltérő j -ik módusban a csillapítás már kötött és értéke:

$$\zeta_j = \frac{a + b\omega_j^2}{2\omega_j}.\tag{2.2.11}$$

A Rayleigh csillapítás kiterjeszhető olyan módon, hogy r számú különböző módusban különböző csillapítást vehessünk fel. Ekkor a csillapítási mátrixot az alábbi módon kell képezni:

$$[\mathbf{C}] = [\mathbf{M}] \sum_{j=0}^{r-1} a_j ([\mathbf{M}]^{-1} [\mathbf{K}])^j.\tag{2.2.12}$$

A ζ_j csillapítások a (2.2.9)-hez hasonló felépítésű egyenletrendszerből számíthatók.

2.2.3. Az alkalmazott differenciámódszer

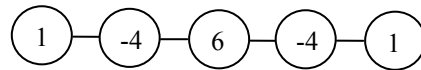
A berepedt kéttámaszú gerendák numerikus vizsgálatát a közismert differenciámódszerrel végeztem el. A gerendát egyenletesen n részre osztottam fel. Az $n-1$ belső csomópontban a hajlítómerevségeknek megfelelő csavarrugót vettem fel. Ha a csomópontba futó két rúdelem hajlítómerevsége eltérő, akkor ezek átlagát vettem figyelembe. A csomópontokba koncentráltam a kapcsolódó elemek tömegének a felét.

Differencia-módszer alkalmazása esetén a $[\mathbf{K}]$ mátrix kitöltéséhez a nyomaték és a görbület közötti, valamint a nyomaték és a teher közötti kapcsolatnak a másodrendű differenciaoperátorokkal kifejezett (2.2.13) és (2.2.14) alakját használhatjuk. Egyenletes felosztás esetén:

$$M_i = -EI \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \approx -\frac{EI}{h^2} (w_{i-1} - 2w_i + w_{i+1}),\tag{2.2.13}$$

$$q_i = -\frac{\partial^2 M}{\partial x^2} \approx -\frac{1}{h^2} (M_{i-1} - 2M_i + M_{i+1}),\tag{2.2.14}$$

ahol: h az osztópontok távolsága. A (2.2.13)-at (2.2.14)-be helyettesítve a rúd $2 < i < n - 2$ belső pontjaira az alábbi séma szerinti differenciaoperátor adódik:

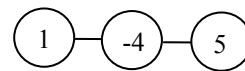
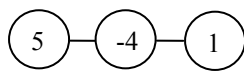


A peremfeltételek figyelembevételéhez a rudat a szokásos módon, a támaszokon túl egy-egy szegmenssel meghosszabbítva két segédpont adódódik. Tekintettel arra, hogy a csukló közelében a görbület zérusnak vehető a segédpontok lehajlására fennáll:

$$w_{-1} = -w_1 ,$$

$$w_{n+1} = -w_{n-1} .$$

Ebből az $i = 1$ és az $i = n-1$ pontokra vonatkozó a differenciaoperátor sémája:



A peremfeltételeknek is eleget tevő merevségi mátrix előállítható a másodrendű differenciaoperátorok kontinuáns mátrixokba rendezésével, az alábbi módon is:

$$[K] = \alpha^4 [Q][D][Q],$$

ahol: $\alpha = \frac{1}{h} = \frac{n}{\ell}$, n az elemszám, $[Q]$ a másodrendű differenciaoperátorok kontinuáns mátrixa, $[D]$ a keresztmetszeti hajlítómerevségek mátrixa:

$$[Q] = \begin{bmatrix} -2 & 1 & & & \\ 1 & -2 & 1 & & \\ & 1 & -2 & . & \\ & & . & . & . \\ & & & . & . \end{bmatrix}, \quad [D] = \begin{bmatrix} EI_1 & & & & \\ & EI_2 & & & \\ & & EI_3 & & \\ & & & . & \\ & & & & . \end{bmatrix}. \quad (2.2.15)$$

A rúdszakaszok tömegét a csomópontokba koncentrálna a tömegmátrix diagonálmátrix lesz:

$$[M] = h \begin{bmatrix} m_1 & & & & \\ & m_2 & & & \\ & & m_3 & & \\ & & & . & \\ & & & & . \end{bmatrix}, \quad (2.2.16)$$

ahol: m_j a hosszegység szerint fajlagosított tömegek.

A csillapítási mátrixot a (2.2.8c) szerint felvéve, a két szabad együtthatóval, két módusban választhattam meg a csillapítást. A kvadratikus $[Q]$, $[D]$, $[K]$, $[C]$ és $[M]$ mátrixok rendszáma $n-1$, azaz a gerenda belső osztópontjainak számával egyezik meg.

A (2.2.7) sajátérték-feladat lehetővé teszi lineáris rezgési feladatok esetén a sajátfrekvenciák és a rezgési alakok meghatározását, ahol a hajlítómerevség hossz mentén változhat, de az időben állandó.

Megjegyezhető, hogy szakaszonként állandó hajlítómerevség esetén, ha a szakaszok száma kicsi, akkor a szakaszonkénti analitikus részmegoldások illesztésével is számíthatók a sajátfrekvenciák és a rezgési alakok.

2.2.4. Nemlineáris rezgésszámítás

Ha a rezgő rendszer merevégi jellemzői időben változnak, akkor nemlineáris rezgés jön létre. A nemlineáris rezgés már nem rendelkezik jól meghatározott sajátfrekvenciákkal. Ha a merevség változása periodikus, vagy legalábbis kvázi-periodikusnak tekinthető, akkor a továbbiakban egy úgynevezett látszólagos sajátfrekvenciát lehet értelmezni. Nemlineáris rezgés esetén a számítások időtérben, időlépéses algoritmus segítségével végezhetők. A rezgés (látszólagos) frekvenciataralma, Fourier-transzformációval vizsgálható. A frekvencia-változások elemzésére a jelfeldolgozás egyéb módszerei, az időablak technikák, a wavelet transzformációs módszerek, stb. használhatók.

2.2.4.1 Időlépéses algoritmusok

A rezgés nemlineáris tulajdonságának figyelembevétele időbeli finitizálást, azaz valamelyik időlépéses algoritmus alkalmazását teszi szükségessé. A kísérlethez végzett numerikus szimulációkban kétféle algoritmust, a centrális differenciák módszerét és a Wilson-módszert is felhasználtam.

Az explicit módszerek – ide tartozik a centrális differenciák módszere is – előnye, hogy időlépésenként kevés mátrixművelettel képezhető a kinetikai jellemzőknek (elmozdulás-sebesség-, gyorsulásvektor) az időlépés végére vonatkozó értéke. Hátrányuk, hogy nem feltétlenül stabilak, és a megoldás konvergenciájának biztosítása érdekében az időlépés nagyságának számottevően kisebbnek kell lennie, mint a modellben rejlő legkisebb sajátrezgés rezgésideje (*Bathe and Wilson (1976)*). Ebből következően a modell felvételnél a szabadságfokot, azaz a gerenda felosztását korlátozni kell, hogy az időlépéses számítás racionális futási idővel végrehajtható legyen. A centrális differenciák módszerének algoritmusai az egyes időlépéseken belül konstans gyorsulás feltételezésén alapszik.

Az implicit módszerek – ide tartozik a Wilson-féle θ -módszer – előnye, az explicit módszerekkel összehasonlítva, hogy feltétlenül stabilak, azaz bármekkora időlépést is választunk, a módszer nem válik divergenciássá. Igaz, túlságosan nagy időlépés esetén a módszer jelentős hibát fog eredményezni. Az időlépés célszerű megválasztásához vizsgálni kell, hogy melyik az a legkisebb periódusidejű módusz, amelyik még számottevő szerepet játszik a rezgésben, és az időlépés nagyságát ezzel összhangban kell felvenni. Ez az eljárás az egyes Δt időlépésekben lineárisan változó gyorsulással számítja az időlépés végén a $t + \Delta t$ időpontban érvényes új gyorsulást, sebességet és elmozdulást. Ehhez első közelítésben egy $\theta > 1$ tényezővel megnövelt fiktív időlépést alapul véve a $t + \theta\Delta t$ időpontban számítja a D' Alembert-elvnek megfelelő kiegyensúlyozatlan erőket és mozgásjellemzőket. Ezután a gyorsulás $\theta\Delta t$ időtartam alatti lineáris változását feltételezve interpolációval kapható a mozgásjellemzők $t + \Delta t$ időpontbeli értéke. A gyakorlati számításokban a $\theta = 1.4$ választás a szokásos. Kimutatták, hogy $\theta < 1.37$ esetén az eljárás elveszíti feltétlenül stabilitását, azaz a modell legkisebb periódusidejét meghaladó Δt időlépések a megoldás divergenciáját okozhatják. Másrészt a $\theta > 1.4$ választás esetén megnő az eljárás pontosságát rontó, úgynevezett numerikus csillapítás.

2.2.4.2. Folytonos és diszkrét Fourier-transzformáció

Dinamikai kísérletek, és az időlépéses algoritmusok által szolgáltatott eredmények az időtérben, idősor formájában keletkeznek. A rezgést jellemző sajátfrekvenciákat a frekvenciatérbe való transzformáció útján, Fourier-transzformációval kapjuk. A diszkrét Fourier-transzformáció véges hosszúságú idősor frekvencia összetevőinek meghatározására szolgál (*Korn és Korn (1975)*).

Egy T hosszúságú folytonos jel Fourier sorfejtése – a trigonometrikus és az exponenciális függvények kapcsolatát felhasználva – az alábbi módon adható meg:

$$x(t) = C_0 + C_1 e^{j2\pi t/T} + C_2 e^{j4\pi t/T} + \dots = \sum_{m=0}^{\infty} C_m e^{j2\pi m t/T} \quad (2.2.17)$$

ahol: j az imaginárius egység. A C_m együtthatók, a frekvencia összetevők amplitúdói:

$$C_m = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x(t) e^{-j2\pi m t/T} dt \quad (2.2.18)$$

Egy folytonos végtelen hosszúságú jel Fourier-transzformációja a (2.2.17)-ből származtatható ha $T \rightarrow \infty$ és ezzel együtt a kitevőben lévő $\omega = \frac{2\pi m}{T} = 2\pi m f$ folytonos függvényé válik:

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) e^{-j2\pi f t} dt. \quad (2.2.19)$$

A diszkrét Fourier-transzformáció a folytonos Fourier-transzformációból származtatható a (2.2.19) integrálkifejezés diszkrétizációjával, valamint az integrálási határoknak a $[-T/2, T/2]$ intervallumra való zsugorításával.

Egy mérés, vagy numerikus szimuláció eredményeként egy $[0, T]$ időintervallumba eső jelsorozatot kapunk. A $[-T/2, T/2]$ intervallum egy eltolási transzformációval feleltethető meg a $[0, T]$ -ba eső idősoroknak. Tekintsük a jelet a $[0, T]$ intervallumon kívül periodikusan ismétlődőnek, vagyis az n -edik és az $n+N$ -edik időpillanatban a jel legyen azonos: $x(n) = x(n+N)$. Ekkor a $[-T/2, 0]$ intervallumba eső jelek mindegyike azonos egy $[T/2, T]$ intervallumba eső jellel.

A számításokhoz használt MATLAB programban implementált Fourier-transzformációs eljárásban a jelsorozat hossza egységnyi (pl. 1 sec).

$$x(k) = \sum_{n=1}^N x(n) e^{-j2\pi(k-1)(n-1)\frac{1}{N}}. \quad (2.2.20)$$

Ha 1 sec-ig tartó, N elemű idősort rögzítünk, akkor ennek transzformáltjában az elemek sorszáma frekvenciát jelent Hz-ben.

2.2.4.3. A felbontás javításának lehetőségei

Egy folytonos jel Fourier-transzformációja végtelenül finom felbontású spektrumot ad. Egy véges T hosszúságú jelsorozat diszkrét Fourier-transzformációja csak véges finomságú felbontást biztosít, azaz spektrumnak csak diszkrét értékeit kapjuk $1/T$ felbontással. Ez a felbontás szükség szerint többféle módon is javítható.

A felbontás növelésének legegyszerűbb eszköze a jelsorozat zérusokkal való meghosszabbítása, melyet a szakirodalom „zeropadding”-nek nevez. Megjegyzendő, hogy ezzel a módszerrel az eredeti folytonos jel frekvenciamenetéről többlet információ nem nyerhető, csupán a rögzített jelsorozat alacsonyabb frekvenciái esetében kapható jobb diszkrét közelítés. Problémát okozhat, ha rögzített jel hirtelen szakad meg, és a követő zérusok ugrással kapcsolódnak a jelsorozathoz. Ekkor a Fourier-transzformáltba hamis frekvenciák is bekerülhetnek.

A felbontás valódi javítása a rögzítendő jelsorozat információtartalmának növelésével lenne elérhető. Ehhez a vizsgált folytonos jelet nagyobb mintavételi frekvenciával és/vagy hosszabb ideig kellene rögzíteni. Sajnos mindkét lehetőség fizikai korlátokba ütközik. A detektáló berendezés mintavételi frekvenciájának van egy felső korlátja, továbbá a csillapítás miatt a rezgési jel használható időtartama is korlátos, ugyanis a mérés körülményeitől függő korlátnál alacsonyabb jelszintnél a „zaj” már jelentősen torzítja a rögzíteni kívánt jelet.

A gyakorlatban többnyire az alacsony frekvencia mellett csak egy-két alacsonyabb sajátfrekvenciának van jelentősége. Ha a szükségesnél nagyobb mintavételi frekvenciával állították elő a jelsorozatot, akkor ritkítással – pl. minden második érték kizárásával - lehet élni. A ritkítás és a 0-ákkal való feltöltés együttes alkalmazásával a jelsorozat úgy is módosítható, hogy a hossza nem változik. Ez az eljárás a vizsgálatba be nem vont magas frekvenciák szempontjából jelent szűrést.

Ha a jel hosszúsága a fizikai korlátok miatt már nem terjeszthető ki, akkor a felbontás javítására a „zeropadding”-en kívül más lehetőség is van. A Fourier-transzformáció végrehajtása előtt a rögzített jel megtöbbszörözhető. A jelismétlés szigorúan véve nem hordoz többletinformációt az eredeti jelhez képest, azonban a Fourier-transzformáció szempontjából mégiscsak kedvezőbb, mint az egyszerű nullával való feltöltés. A jelsorozat többszöri egymás után történő másolása estén is jelentkezhet azonban a „zeropadding”-nél megfigyelt zavaró jelenség. Ha a jelsorozat vége az ismétlés elejéhez ugrással és/vagy töréssel csatlakozik az ismétlés elejéhez akkor hamis frekvenciák kerülhetnek a spektrumba. Ez a probléma a megfelelő „folytonos” átmenetet biztosító ablakfüggvény (pl. 2.2.1b. ábra) segítségével oldható meg a 2.2.4.4. fejezet szerint.

2.2.4.4. Az idősor egy szeletének vizsgálata

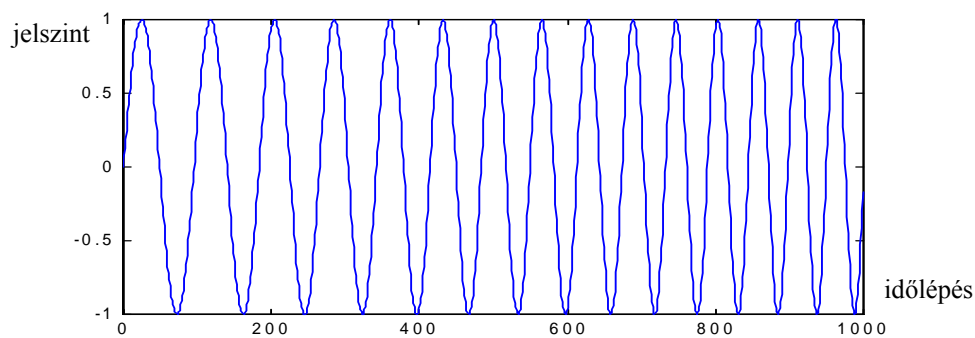
Mind a folytonos, mind a diszkrét Fourier-transzformáció hallgatólagosan feltételezi, hogy a vizsgált jel frekvenciatartalma időben állandó. Ha ez nem áll fenn, mint pl. nemlineáris rezgés esetén, akkor a transzformáció révén valamilyen átlagosított frekvenciákat kapunk. Ezek a vizsgált időtartam középső tartományához tartozó frekvenciák közelítésének tekinthetők, ha a frekvenciák folytonos és nem túl gyors változása tételezhető fel. Elegendő hosszúságú változó frekvenciájú jelsorozat esetén vizsgálható a frekvencia változása is olyan módon, hogy a jelsorozatból rövidebb időszelleteket vágunk ki. A pillanatnyi frekvencia meghatározásához minél kisebb időszelletek felvétele volna kedvező, azonban a szelet zsugorításával a benne foglalt információ tartalom is csökken. A megfelelő méretű időszelet, vagy időablak felvétele nem egyszerű, mert a fentiek szerint két ellentétes szempontnak kell megfelelnie.

Idő-frekvencia kapcsolat állítható elő olyan módon, hogy egy megfelelő ablakfüggvényt mozgatunk a vizsgált időtartam mentén, mintegy szűrőt alkalmazva a rögzített jel egy-egy részintervallumára. Kézenfekvő lenne a „négyzetes időablak”, azaz

$$W(t) = \begin{cases} 1 & \text{ha } t \in [t_1, t_2] \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}, \quad (2.2.21)$$

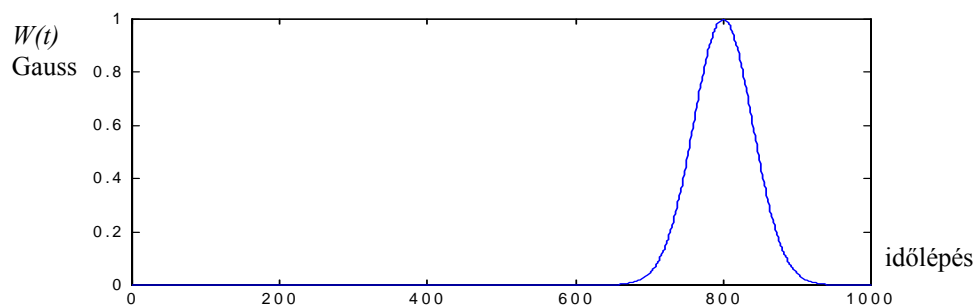
ahol t_1 az időablak kezdete és t_2 az időablak vége. Ezzel az ablakfüggvénnyel azonban szakadásos jelsorozatot állítunk elő, mely a már fentiekben taglalt problémát okozhatja. A gyakorlatban ablakfüggvényként olyan folytonos függvényt használnak, mely az ablak elején és a végén fokozatosan zérusra vagy zérus körüli értékre csökkenti, azaz „elnyomja” a jelet. Ilyen ablakfüggvény pl. a Gauss-típusú haranggörbe (2.2.1b. ábra), a „Hamming-window” és „Parzen-window” (Ramirez (1985)).

A mozgó időablak használatát az alábbi példán keresztül mutatom be. Legyen adott a 2.2.1a. ábrán látható lineárisan növekvő frekvenciájú jelsorozat. A jel időtartama 1 sec, felbontása 0.001 sec. A jel pillanatnyi frekvenciája $t = 0$ sec helyen 10 Hz, $t = 1$ sec helyen 20 Hz.



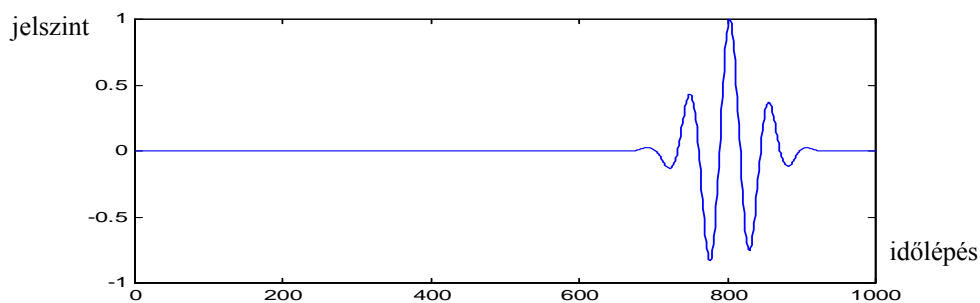
2.2.1a. ábra: Lineárisan növekvő frekvenciájú jelsorozat

Határozzuk meg a jelsorozat pillanatnyi frekvenciáját a $t = 0.8$ sec helyen. Ebből a célból vegyünk fel pl. egy Gauss-ablakot úgy, hogy szimmetriatengelye a $t = 0.8$ sec-nak megfelelő 800-ik időlépés legyen (2.2.1b. ábra).



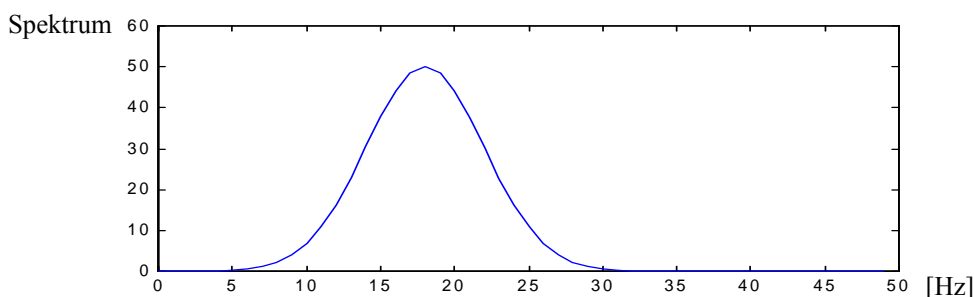
2.2.1b. ábra: Gauss-ablak, centrum $t = 0.8$ sec-ban.

Képezzük a vizsgált jel (2.2.1a. ábra), valamint az időablak (2.2.1b. ábra) direktszorzatát (2.2.1c. ábra).



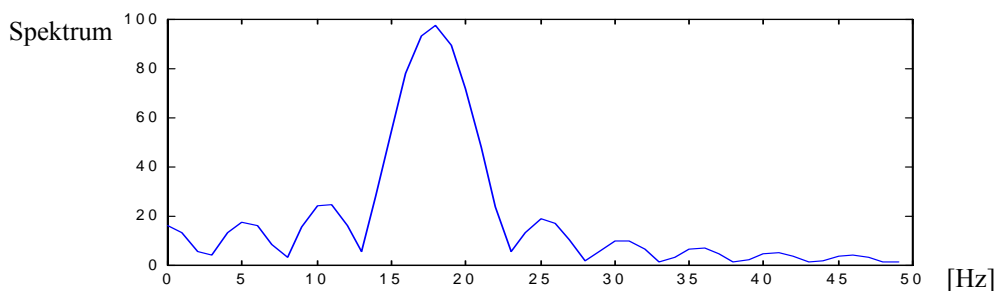
2.2.1c. ábra: A direktszorzat.

A 2.2.1c. ábra szerinti függvény Fourier-transzformációjával megkapjuk a keresett frekvenciát (2.2.2a. ábra), mely a várakozásnak megfelelően 18 Hz.



2.2.2a. ábra: Gauss-ablakkal készített spektrum.

A spektrumot a (2.2.21) szerinti négyszögletes időablakkal is meghatároztam (2.2.2b. ábra). Legyen az időablak szélessége 0.2 sec úgy, hogy $t_1 = 0.7$ sec és $t_2 = 0.9$ sec.



2.2.2b. ábra: Négyszögletes ablakkal készített spektrum.

A direktszorzás és Fourier-transzformáció végrehajtása után eredményül ismét 18 Hz-t kaptam. A spektrumon azonban úgynevezett oldalszirmok is jelentkeznek, melyek valóságos rezgés esetén a magasabb sajátfrekvenciák kiértékelésében okoznának gondot. Tapasztalatok szerint az „oldalszirmok elnyomásában” a Parzen-ablak egyike a legkedvezőbbeknek (Ramirez (1985)).

Megjegyzendő, hogy a nemlineáris rezgési spektrum analízisére még számos matematikailag igényesebb eljárását is kidolgoztak. Ilyen további lehetőség pl. a wavelet, illetve diszkrét wavelet transzformáció (Graps (1995)), valamint az auto-regressziós modellek.

2.3. NEMFESZÍTETT VASBETONGERENDA REZGÉSVIZSGÁLATA

A 2.2. fejezetben összefoglalt számítási módszereket alkalmazom a berepedt kéttámaszú vasbetongerendák szabad rezgéseivel kapcsolatos numerikus vizsgálataimban.

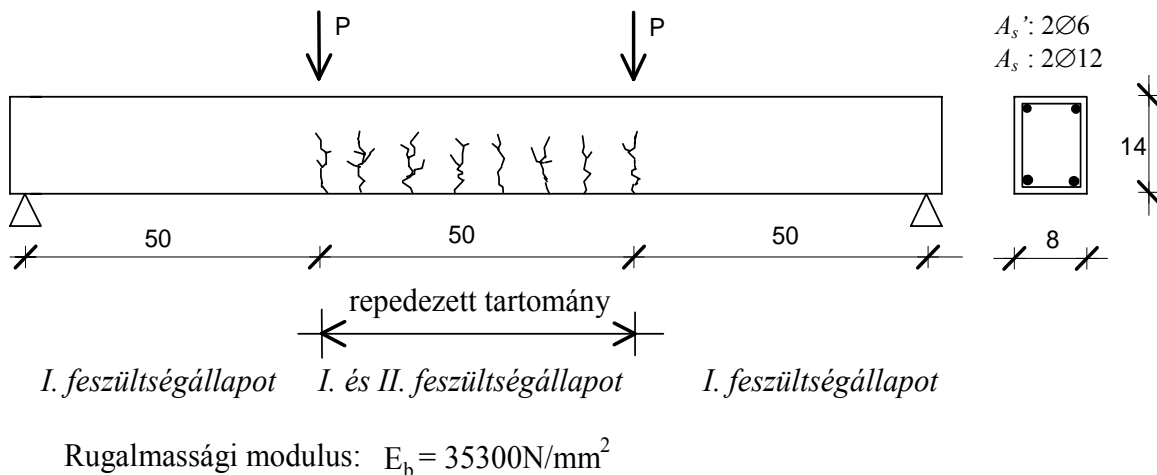
Az általam kidolgozott MATLAB programok felhasználásával lineáris és nemlineáris számításokat ismertetek egy modellgerenda sajátrezgéseivel kapcsolatban. Azt vizsgálom, hogy a repedések periodikus jellegű záródása hogyan befolyásolja a rezgési jellemzőket. Magyarázatot keresek arra a jelenségre, hogy egy gerenda-kísérlet sajátrezgési spektrumában az első sajátfrekvencia helyén két nagyon közeli kettős csúcs jelentkezett. A nemlineáris rezgés szimulációival vizsgálom, hogy hogyan befolyásolja az indító impulzus és a csillapítás nagyságának változtatása a spektrum és benne a kettős csúcs alakulását. A diszkrét Fourier-transzformáció alkalmazásával állítom elő a látszólagos sajátfrekvencia idő-függvényét. Egyszerű lineáris modelleket mutatok be a látszólagos sajátfrekvenciák közelítő meghatározására.

2.3.1. Kísérletek és numerikus vizsgálatok

2.3.1.1. Laboratóriumi kísérletek

A berepedt kéttámaszú vasbetongerendák dinamikai viselkedésének tanulmányozására a BME Vasbetonszerkezetek Tanszékének laboratóriumában kísérleteket végeztek (Chu (1994)).

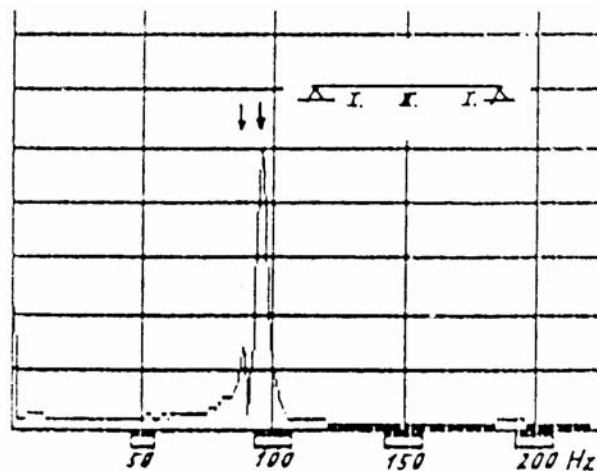
A kísérletek során, első lépésben, a vizsgált vasbetongerendákban statikus P terheléssel a tartó középső harmadában a repesztő nyomatókat meghaladó hajlítónyomatókat idéztek elő. Ennek következtében a kérdéses tartományban a húzott oldalon repedések képződtek (2.3.1. ábra).



2.3.1. ábra: A Chu-féle kísérletben használt gerendamodell. (A méretek [cm]-ben értendők).

Ezután a gerendát egy impakt külső teherrel, gumikalapács ütésével rezgésre készítették. Vizsgálták a gerenda rezgését terheletlenül, valamint úgy is, hogy közben a gerenda harmadpontjaiban sajtóval különböző intenzitású függőleges erőket működtettek.

A berepedt és terheletlen gerendán végzett kísérletben felvett idő-gyorsulás diagram spektrálfelbontása szerint (2.3.2. ábra) a gerenda első sajátfrekvenciája 98Hz-re adódott, továbbá 89Hz-nél egy mellécsúcs is jelentkezett.



2.3.2. ábra: A berepedt gerenda mezőközépi keresztmetszetének rezgési spektruma, *Chu, Van Nguyen (1994)*

A mérés célja a frekvenciák meghatározása volt, ezért az y tengely skálázására nem volt szükség.

A szerző a kísérletekből megállapította:

- Növekvő terhelés mellett a frekvenciaspektrumok változnak. A spektrumok változása a gerendamerevség változásának következménye.
- Megállapította, hogy a berepedt gerenda spektrumában a sajátfrekvenciákat jelentő csúcsok sűrűbben jelentkeznek, mint a repedésmentes gerendánál.

A szerző nemlineáris rezgésvizsgálatot nem végzett, ezért a repedéseknek a rezgésre gyakorolt hatását nem tudta mélyebben feltárni. Nem adott magyarázatot a spektrumban talált kettős csúcsra sem. Az irodalomban sem találtam meg a kettős csúcs vizsgálatát.

2.3.1.2. A gerenda lineáris frekvenciaszámítása

A berepedt gerenda numerikus modellezése során feltételeztem, hogy a repedések összefüggő rendszert alkotnak a gerenda középső harmadában. Az EUROCODE repedéstágasság számítási modelljében – állandó vagy közel állandó nyomaték esetén – a repedések átlagos távolsága átlagos vashányadú gerendák esetén 100-120mm. A repedések ilyen távolsága mellett a húzott öv merevítő hatása csekély. Ezt mutatja, az EC szerinti görbület számítás képlete is:

$$\kappa_{EC} = \zeta^{(EC)} \kappa_{II} + (1 - \zeta^{(EC)}) \kappa_I, \quad (2.3.1)$$

ahol: κ_I a repedésmentes tartó -, κ_{II} a berepedt tartó görbületét, κ_{EC} a tartó EUROCODE szerinti görbületét jelenti. A fenti súlyozott átlagban a $\zeta^{(EC)} = 0.97 \div 0.99$, azaz a II. feszültség állapot szerinti viselkedés a domináns. Ennek megfelelően a repedések okozta merevségcsökkenést a középső harmadban elkenve alkalmaztam.

A gerenda lineáris frekvenciaszámítását a csillapítás elhanyagolásával végeztem. A gerenda rezgésének lineáris számításánál időben állandó hajlítómerevséget tételezünk fel. Ez

lehetővé teszi az 2.3.1. ábra szerinti gerenda sajátfrekvenciáinak becslését alsó és felső korlátok megadásával. A felső korlát a teljes hosszön konstans EI_I hajlítómerevség felvételével a (2.2.3)-ból számítható. Alsó korlátot úgy kaphatunk, hogy repedezett tartományra a kisebb - időben állandónak tekintett – EI_{II} hajlítómerevséget vesszük fel (2.3.3. ábra). Ez lényegében egy olyan tartót modellez, melynek a középső harmadában pozitív, és negatív nyomatékok egyaránt repedéseket hoznak létre mindkét övben (gyengített tartó).

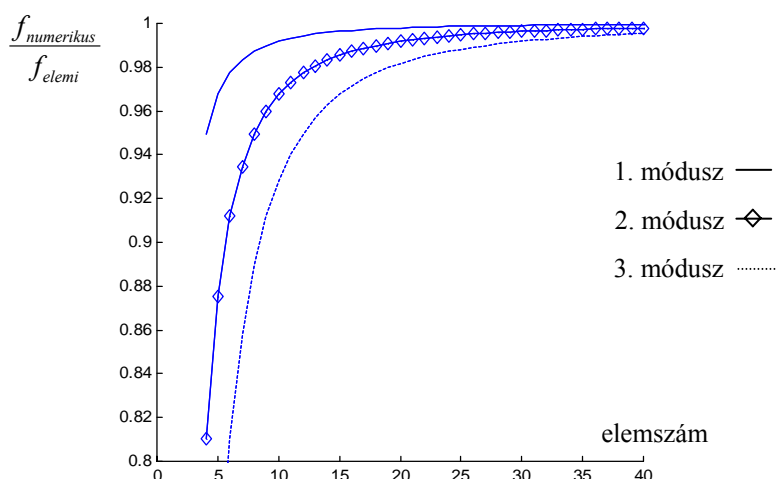


2.3.3. ábra: Hajlítómerevség a hossz mentén a lineáris számításokban.

A csillapítás elhanyagolásával, a berepedt (gyengített) tartó sajátfrekvenciái a (2.2.7)-ből származtatható alábbi valós sajátérték-feladat megoldásából adódnak.

$$([K] - \omega_i^2 [M])u_i = 0 . \quad (2.3.2)$$

A differenciamódszeren alapuló számítás pontossága jelentős mértékben függ a gerenda felosztásának finomságától. A megfelelő felosztás kiválasztásához parametrikus vizsgálatot végeztem repedésmentes, azaz a hosszmentén állandó hajlítómerevségű tartón. A különböző felosztásokhoz numerikus módon (2.3.2) meghatározott sajátfrekvenciákat, az elemi (pontos) (2.2.3) számítás eredményeivel vettem össze. E számítások eredményeit az elemszám függvényében, az első három móduszt illetően a 2.3.4. ábra tartalmazza.



2.3.4. ábra: A pontosság vizsgálata a felosztás függvényében, 1., 2., 3. módusz.

A grafikonok alapján az 1. módusz vizsgálatához 20-25, a 2. módusz vizsgálatához 25-30, a 3. módusz vizsgálatához legalább 30-40 elem szükséges. A modellkísérlet gerendáját a hossz tengelye mentén egyenletesen 24 részre osztottam.

A kísérlet és a lineáris számítás eredményeit a 2.3.1 táblázatban foglaltam össze.

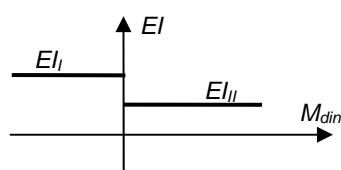
2.3.1. táblázat: A repedésmentes és a „gyengített” tartó sajátfrekvenciái.

Kísérlet és számítási módszerek	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]	f_3 [Hz]
Lineáris számítás, repedésmentes gerenda	109	436	981
Kísérlet, valóságos berepedt gerenda	98		
Lineáris számítás, gyengített gerenda	86	397	862

A 2.3.1 táblázat első sora a repedésmentes gerenda sajátfrekvenciáit tartalmazza. A második sor a kísérletből kapott a spektrum szerinti főcsúcsnak megfelelő értéket tünteti fel, sajnos ebből a mérésből magasabb látszólagos sajátfrekvenciák nem álltak rendelkezésre. A harmadik sorban a gyengített gerenda sajátfrekvenciái láthatók. A táblázatból kitűnik, hogy a kísérletben meghatározott első sajátfrekvenciát közrefogja a repedésmentes gerendára (felső korlát) és a gyengített gerendára (alsó korlát) kapott eredmény.

2.3.1.3. Nemlineáris vizsgálat a önsúly okozta repedésmegnyílás elhanyagolásával

A fentiek alapján megállapítható, hogy a kísérlet szerinti berepedt gerenda első sajátfrekvenciája szignifikánsan eltér a lineáris számítások eredményeitől. Ennek az az oka, hogy a gerenda repedezett szakaszán a keresztmetszeti hajlítómerevség nagysága nem állandó, hanem attól függ, hogy a repedés megnyílását, vagy bezáródását okozó nyomaték terheli-e a szóban forgó keresztmetszetet. Ha a kezdeti repedéseket pozitív nyomatékok okozták, akkor a repedezett tartomány i keresztmetszeteiben a hajlítómerevség a dinamikus nyomatékból az alábbi egyszerűsített összefüggéssel adható meg [1]:



$$EI_i = \begin{cases} E_b I_{i,I} & \text{ha } M_{din,i} < 0 \\ E_b I_{i,II} & \text{ha } M_{din,i} \geq 0 \end{cases}, \quad (2.3.3)$$

ahol: $I_{i,I}$ az ideális keresztmetszet I. feszültségállapot szerinti, $I_{i,II}$ pedig a II. feszültségállapot szerinti inercianyomatékát, $M_{din,i}$ pedig a rezgésből származó (dinamikus) hajlítónyomatékot jelenti.

A beton rövid idejű teherre vonatkozó E_b rugalmassági modulusa időben állandó, ha a rezgés amplitúdói elegendően kicsik. A (2.3.3) összefüggés a önsúly okozta repedésmegnyílás hatását elhanyagolja.

A rezgés a repedések jelenléte miatt nemlineáris jelleget mutat, még akkor is, ha feszültségek az arányossági határon belül vannak. A nemlineáris rezgés szigorú értelemben nem rendelkezik sajátfrekvenciával. A berepedt gerenda differenciámódszer szerinti modelljén számított nemlineáris rezgése a (2.3.3) összefüggésnek megfelelően többféle lineáris rezgésből tevődik össze. Ez a periodikus, azaz szigorúan véve kvázi-periodikus mozgás, olyan harmonikus szegmensekből áll, melyek az időben rendre egymás folytatásai abban az értelemben, hogy a kitérés és a sebesség folytonos. A kísérlet során rögzített jelsorozat Fourier-transzformációjával az egyes rezgési összetevők sajátfrekvenciáinak környezetébe eső, de azoktól eltérő eredményeket kapunk, melyek látszólagos sajátfrekvenciáknak nevezhetők.

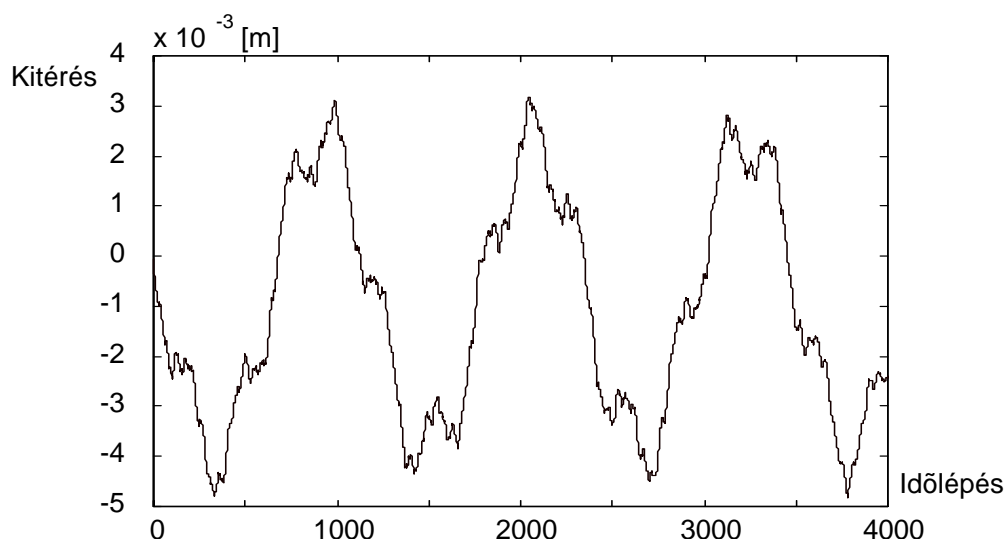
A kísérlet eredményei - különös tekintettel a mellécsúcsra, arra indítottak, hogy a berepedt gerenda rezgéseit numerikusan is modellezzem. A nemlineáris modellen a hajlítómerevség (2.3.3) szerinti, időben periodikus változását figyelembe véve, egy

szabadrezgési problémát vizsgáltam. Ehhez ütésszerű terhet modelleztem a tartó harmadában az alábbi módon:

$$F(t,x) = \begin{cases} F_0 & \text{ha } t \leq \Delta t \text{ és } x = l/3 \\ 0 & \text{ha } t > \Delta t. \end{cases} \quad (2.3.4)$$

Ez lényegében megfelel a 2.3.1. ábra szerinti gerendán végzett mérésnek. Kezdeti feltételként mozdulatlan és terheletlen tartót vettem fel.

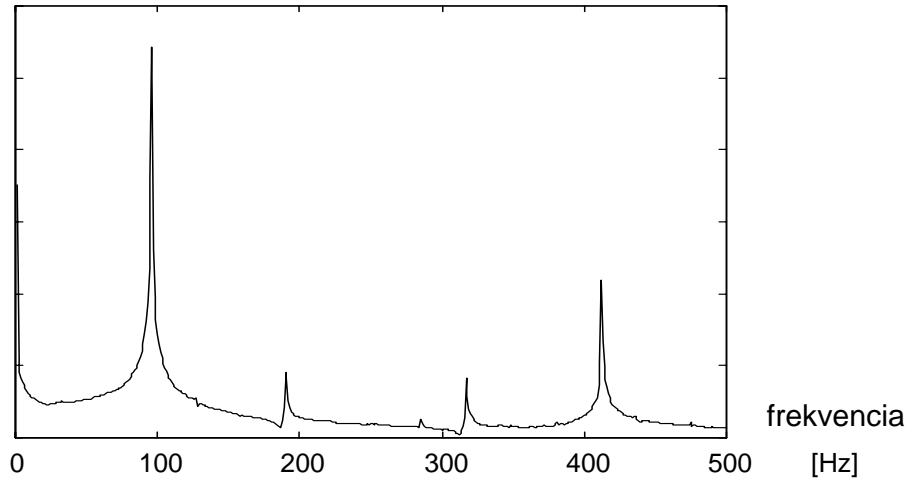
A számítást a centrális differenciák módszerével végeztem. A Δt időlépést - az explicit módszer numerikus stabilitása érdekében - igen kicsinynek, a repedésmentes tartó első sajátrezgése rezgésidejének 1/1000 részére vettem fel. Így a Δt ideig működő erőhatás egy Dirac impulzushoz hasonló. (A Dirac függvény az $x=0$ környezetében értelmezett olyan téglalap alakú függvény, melynek területe egység és közben az abszcissa irányú mérete zérushoz tart). A rezgés 1 sec időtartamú szeletét vizsgáltam, melybe 109000 időlépés esett. A 2.3.5. ábrán a rezgés 1-4000 időlépés intervallumába eső idő-kitérés diagramját tüntettem fel, az $x=l/2$ keresztmetszetben. E számításban a csillapítást elhanyagoltam.



2.3.5. ábra. Idő-kitérés diagram közvetlenül a teherimpulzus után a mezőközépen. (A részleteket némileg torzítja a nyomtatás felbontása)

A 2.3.5. ábra jól szemlélteti, hogy a Dirac-impulzus az összes sajátfrekvenciát gerjeszti (white noise *Pfaffinger (1988)*)

E kvázi-periodikus mozgás sajátfrekvenciáját az idő-kitérés diagram diszkrét Fourier-transzformációjával határoztam meg. A 2.3.6. ábrán látható az ebből kapott spektrum 0-500 Hz tartománya, melybe az első két sajátfrekvencia esik bele. A harmadik látszólagos sajátfrekvencia nem jelentkezett, mert a hozzátartozó rezgésalaknak – berepedt gerenda esetén – az alkalmazott teherimpulzus helyének közelében van csomópontja. A számítás szerint a nemlineáris rendszer első látszólagos sajátfrekvenciája 96 Hz. (A 2.3.6. ábra függőleges irányban torzított). A 200 Hz és 300 Hz közelében látható csúcsok hulláminterferencia következményei.



2.3.6. ábra: Idő-kitérés diagram spektrálfelbontása.

A numerikus szimuláció célja a frekvenciák meghatározása volt, ezért az y tengely skálázására nincs szükség. (Az y értékek értelemszerűen a Fourier-transzformáció (2.2.17) képletéből adódnak).

2.3.1.4. Nemlineáris vizsgálat az önsúly okozta repedésmegnyílás figyelembevételével

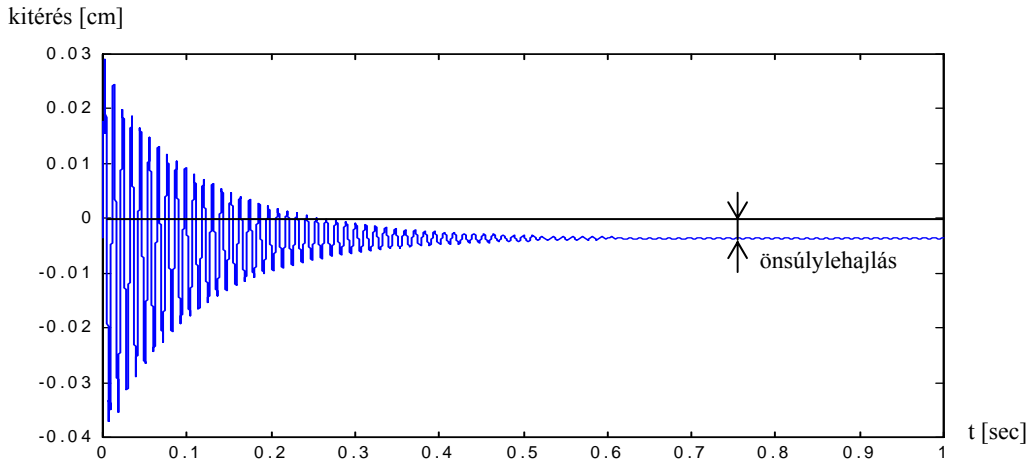
A 2.3.1.3. fejezet szerinti számítási modell a sajátfrekvencia spontán szétválását nem igazolja, a 2.3.6. ábrán látható spektrum nem mutat mellécsúcsot, a numerikus szimulációval előállított első rezgési alakhoz csak egyetlen látszólagos sajátfrekvencia tartozik.

A önsúly okozta repedésmegnyílás figyelembevétele esetén azonban a helyzet megváltozik. Az önsúlynyomaték hatására a repedések a középső tartományban már a nyugalmi helyzetben megnyílnak, így a hajlítómerevség (2.3.3) lépcsős változását leíró függvény a következőképpen módosul [1]:

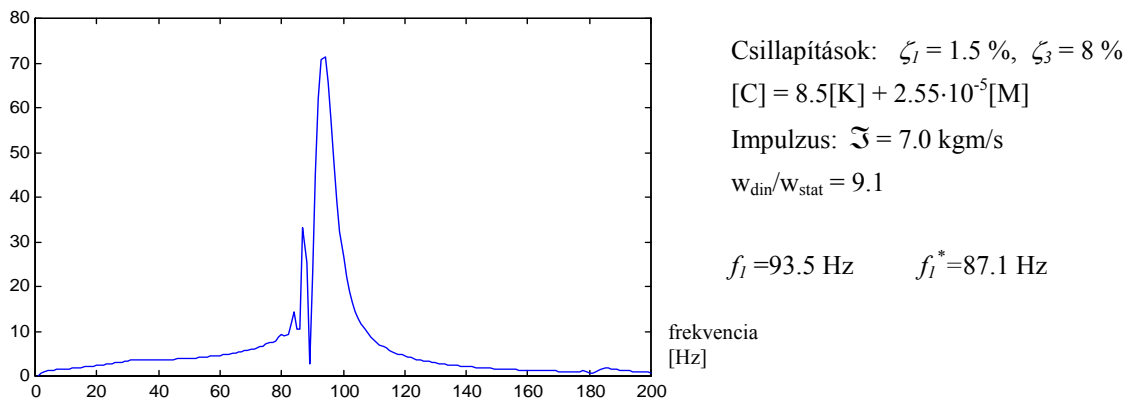
$$EI_i = \begin{cases} E_b I_{i,I} & \text{ha } M_{din,i} + M_{stat,i} < 0, \\ E_b I_{i,II} & \text{ha } M_{din,i} + M_{stat,i} \geq 0. \end{cases} \quad (2.3.5)$$

Az inercianyomaték váltás (2.3.5) szerinti eltolódása módosítja a szabadrezgés spektrumát. A spektrum az első látszólagos sajátfrekvencia helyén kettős csúcsot mutathat, az impulzus, az önsúly és a csillapítás megfelelő viszonya esetén. A paraméterek megfelelő megválasztásával sikerült a mérési eredményhez hasonló spektrumot létrehozni a számítási modell segítségével is.

A vizsgált gerendamodellen a önsúly okozta repedésmegnyílás figyelembevételével is előállítottam a rezgési idősort (2.3.7a. ábra) a Wilson-típusú időlépéses integrálással és a spektrumot Fourier-transzformációval (2.3.7b. ábra). Kezdeti feltételként az önsúly okozta lehajlásrendszert és mozdulatlan tartót vettem figyelembe. Az idősor 1 sec hosszúságú volt és 50 000 időlépést tartalmazott. A számításban Rayleigh-típusú csillapítást alkalmaztam. A (2.2.8c) lineáris kombinációban az a és b paramétert úgy vettem fel, hogy a repedésmentes gerenda első móduszában 1.5%, a harmadik móduszában pedig 8%-os csillapítást valósuljon meg. A spektrum ábrája mellett feltüntettem a csillapítást, az indító impulzus nagyságát, valamint a maximális dinamikus kitérés és statikus lehajlás arányát.



2.3.7a. ábra. A kitérés időszora az $\ell/3$ keresztmetszetben.



2.3.7b. ábra. Kettős csúcs a gerendamodell spektrumában

A spektrum szerint a látszólagos sajátfrekvenciák kerekítve 87 Hz és 93 Hz értékűek. Az ismertetett kísérletben e frekvenciákra 89 Hz-t ill. 98 Hz-t adódtak.

A főcsúcs az önsúly okozta repedésmegnyílás figyelembevétel nélkül kapott 96 Hz-nél valamivel kisebb frekvenciát mutat tekintve, hogy a berepedt tartó csökkentett hajlítási merevsége az önsúlynyomaték következtében a fél periódusnál hosszabb ideig van érvényben. A mellécsúcs egy ennél kisebb frekvenciát képvisel, ez a gyengített tartón végzett lineáris számítás eredményéhez áll közelebb.

Kellő nagyságú impulzussal elindítva, a vizsgált időtartam első szakaszában olyan nagy lehet a rezgés amplitúdója, hogy az ennek megfelelő negatív nyomatékot a pozitív önsúlynyomatékokra szuperponálva, negatív eredő nyomatékot ad a repedezett tartományban. Ezen túlmenően, a csillapításnak olyan mértékűnek kell lennie, hogy a vizsgált időtartam második szakaszában a rezgésből származó csökkenő dinamikus nyomaték-amplitúdó abszolút értékben már ne haladja meg az önsúlynyomatékot. A rezgési paraméterek fenti összjátéka estén előállhat a spektrumban a kettős csúcs.

A jelenség lényege, hogy a vizsgált időtartamban a csillapítás miatt csökkenő amplitúdójú rezgést az önsúly hatása két részre osztja. Az első szakaszban még periodikus jelleggel záródnak a repedések, a második szakaszban már nem záródnak. A rezgés első szakasza tehát (geometriailag) nemlineáris rezgés, míg a második szakasz állandó hajlítómerevség mellett lineáris rezgés. A nemlineáris vizsgálatok eredményeit a 2.3.2. táblázat foglalja össze:

2.3.2. táblázat: A nemlineáris vizsgálatok összehasonlítása

Számítási módszerek	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]
Nemlineáris számítás önsúly okozta repedésmegnyílás nélkül	96	414
Nemlineáris számítás önsúly okozta repedésmegnyílással	87, 93	

2.3.1.5. Numerikus szimulációk változó csillapítás és indító impulzus mellett

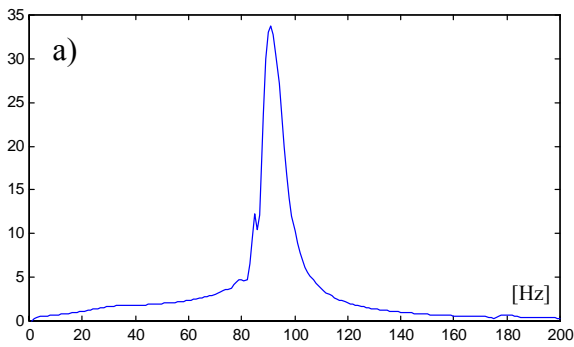
Parametrikus vizsgálatot végeztem annak érdekében, hogy megállapíthassam, milyen hatása van a berepedt gerenda spektrumára az indító impulzus és a csillapítás változtatásának. A frekvenciák pontosabb meghatározása érdekében 10-szeres zeropaddinget (2.2.4.3. fejezet), azaz 10 sec hosszúságú jelet használtam.

A spektrumokat az önsúly okozta repedésmegnyílás hatásának a 2.3.1.4. fejezet szerinti figyelembevételével készítettem. (A gerenda felosztása, geometriája azonos a korábbiakkal.) Az alábbiakban közölt vizsgálatokban kétféle csillapítást és háromféle impulzust vettem fel.

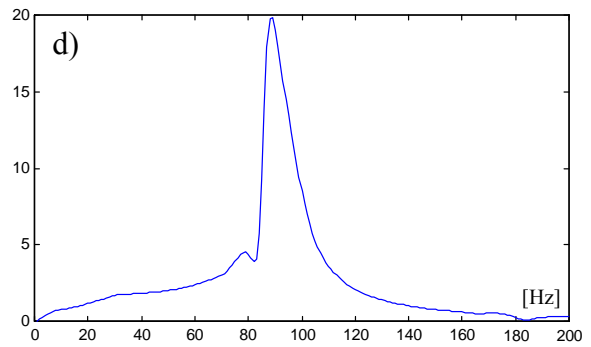
Az idősorok spektrumainak az első látszólagos sajátfrekvenciát tartalmazó 0-200 Hz intervalluma a 2.3.8a-f. ábrason látható. A csillapításokat irodalmi adatokra támaszkodva vettem fel. (*Dieterle és Bachmann (1980)*). A hat spektrumot a jobb átláthatóság érdekében a következőképpen úgy rendeztem el, hogy az első oszlopban a $\zeta_1 = 1.5\%$, $\zeta_3 = 8\%$ csillapítással a másodikban a $\zeta_1 = 3\%$, $\zeta_3 = 10\%$ csillapítással készült spektrumok találhatóak. A vízszintes sorokban az azonos ütés nagysághoz – rendre az $\mathfrak{S} = 3.5, 5.0, 7.0$ kgm/s impulzushoz – tartozó spektrumok szerepelnek. A fenti spektrumok összehasonlítása alapján a következő megállapítások tehetők:

- A spektrumbeli főcsúcs természetesen mindig beleesik a repedésmentes és a gyengített gerenda sajátfrekvenciája közötti intervallumba.
- Nem jelentkezik a kettős csúcs, ha
 - a csillapítás mértékétől függetlenül kicsi a kezdeti impulzus,
 - az indító impulzus nagyságától függetlenül nagyon kicsi, vagy nagyon nagy a csillapítás.
- A főcsúcs a frekvenciatengely mentén kismértékben elmozdul, ha a kezdeti impulzus nagysága változik:
 - kis ütés esetén a gyengített gerenda sajátfrekvenciájához közelít,
 - nagyobb ütés esetén a magasabb frekvenciák felé tolódik.
- A csillapítás növekedésével a főcsúcs környezete szélesedik.

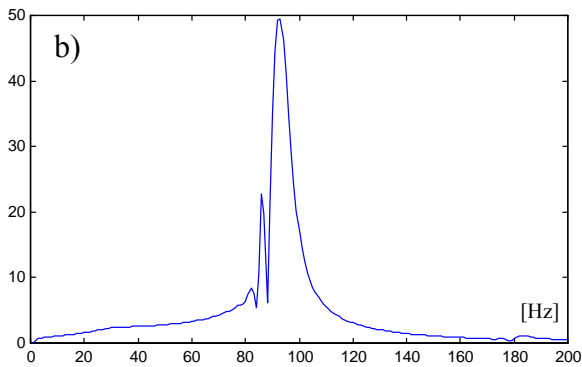
Összefoglalva megállapítható, hogy – periodikus jellegű repedészáródás esetén – egy gerenda látszólagos sajátfrekvenciája nem csupán a gerenda tulajdonságaitól, azaz geometriájától, anyagától, repedezettségétől és csillapításától, hanem emellett még az indító impulzus nagyságától is függ. Periodikus jellegű repedészáródás esetén tehát a berepedt vasbetongerenda látszólagos sajátfrekvenciája határozatlan.



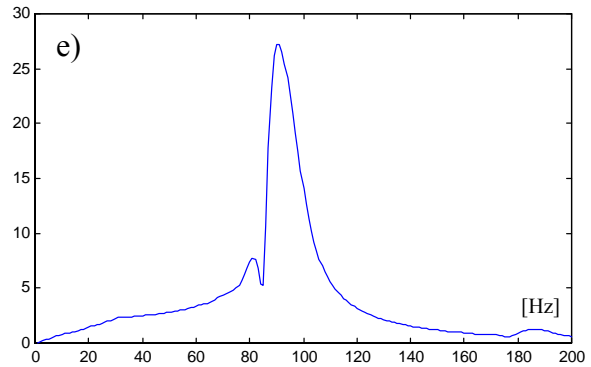
$f_l = 90.2 \text{ Hz}$ $f_l^* = 85.2 \text{ Hz}$ **Impulzus: $\mathfrak{I} = 3.5 \text{ kgm/s}$**
Csillapítások: $\zeta_l = 1.5 \%$, $\zeta_3 = 8 \%$
 $w_{din}/w_{stat} = 4.39$



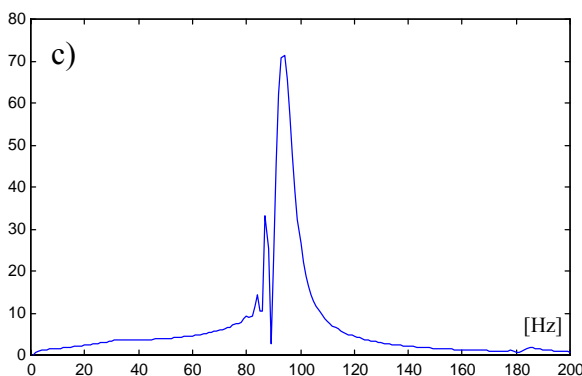
$f_l = 87.8 \text{ Hz}$ $f_l^* = 79.4 \text{ Hz}$
Csillapítások: $\zeta_l = 3 \%$, $\zeta_3 = 10 \%$
 $w_{din}/w_{stat} = 4.21$



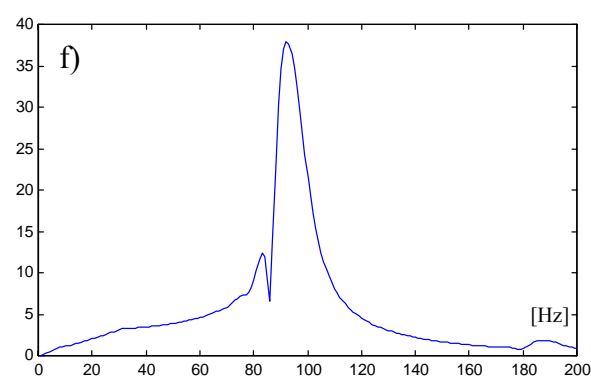
$f_l = 91.6 \text{ Hz}$ $f_l^* = 86.1 \text{ Hz}$ **Impulzus: $\mathfrak{I} = 5.0 \text{ kgm/s}$**
Csillapítások: $\zeta_l = 1.5 \%$, $\zeta_3 = 8 \%$
 $w_{din}/w_{stat} = 7.78$



$f_l = 88.5 \text{ Hz}$ $f_l^* = 80.5 \text{ Hz}$
Csillapítások: $\zeta_l = 3 \%$, $\zeta_3 = 10 \%$
 $w_{din}/w_{stat} = 7.15$



$f_l = 93.5 \text{ Hz}$ $f_l^* = 87.1 \text{ Hz}$ **Impulzus: $\mathfrak{I} = 7.0 \text{ kgm/s}$**
Csillapítások: $\zeta_l = 1.5 \%$, $\zeta_3 = 8 \%$
 $[C] = 8.5[\text{K}] + 2.55 \cdot 10^{-5}[\text{M}]$
 $w_{din}/w_{stat} = 9.1$



$f_l = 92.1 \text{ Hz}$ $f_l^* = 82.1 \text{ Hz}$
Csillapítások: $\zeta_l = 3 \%$, $\zeta_3 = 10 \%$
 $[C] = 26[\text{K}] + 3.14 \cdot 10^{-5}[\text{M}]$
 $w_{din}/w_{stat} = 8.37$

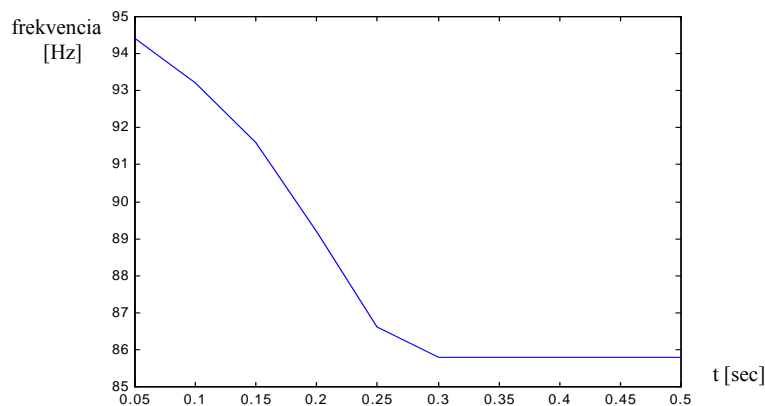
2.3.8. ábra: Az indító impulzus és a csillapítás hatása a látszólagos sajátfrekvenciákra

2.3.1.6. A látszólagos sajátfrekvencia, mint az idő függvénye

A 2.3.1.4. fejezetből azt a következtetést lehet levonni, hogy a berepedt gerenda rezgésének látszólagos sajátfrekvenciája a szabadrezgés időtartama alatt enyhén változik. Ennek egyik forrása a repedések periodikus jellegű záródása. A szabad rezgés első szakaszában az amplitúdók még elegendően nagyok ahhoz, hogy a repedések záródjanak. Eközben azonban a csillapítás miatt az amplitúdók csökkennek, így a repedészáródás időtartama és ezzel összhangban a nagyobb EI_I hajlítómerevség érvénytartama csökken. Ez a látszólagos sajátfrekvencia fokozatos csökkenéséhez vezet.

Ha nagy indító impulzus hatására a szabadrezgés kezdetén a legnagyobb nyomatékok helyén a gerenda anyaga átlépi a rugalmas határt, akkor az első egy-két periódusban ez is módosítja a látszólagos sajátfrekvenciát. A rezgés közben a nagy nyomatékok felléptekor az $M-\kappa$ görbe meredeksége és ezzel a számításba vehető hajlítómerevség csökken. Emellett a hiszterézis miatt jóval nagyobb a csillapítás, mint az arányossági határon belül történő rezgőmozgás esetén, tehát hamar beáll a számításokban feltételezett rugalmas rezgés. Ez a hatás az első periódusban – néhány század másodpercig – gyors, de nem nagy mértékű frekvencianövekedéssel jár.

A látszólagos sajátfrekvencia változás szempontjából megvizsgáltam a kísérleti gerenda szabadrezgésének a 2.3.7b. ábra szerinti adatokkal előállított idősorát. Az első 0.5 sec hosszúságú tartományára 10 db Gauss-ablakot illesztettem, úgy, hogy az ablakközepük rendre a $t = 0.05, 0.10, 0.15, \dots, 0.5$ sec időpontokban helyezkedtek el. A frekvenciaváltozásra kapott görbe 2.3.9. ábrán látható.



2.3.9. ábra: A vizsgált gerenda látszólagos sajátfrekvenciájának időbeli változása.

A várakozásnak megfelelően a mozgó időablakos vizsgálatból kapott látszólagos sajátfrekvenciák – a rezgés kezdetén a repedések periodikus jellegű záródása miatt – az önsúly keltette repedésmegnyílás nélküli gerenda látszólagos sajátfrekvenciájához állnak közelebb, míg a rezgés kis amplitúdójú szakaszában a gyengített gerenda sajátfrekvenciájához közelednek.

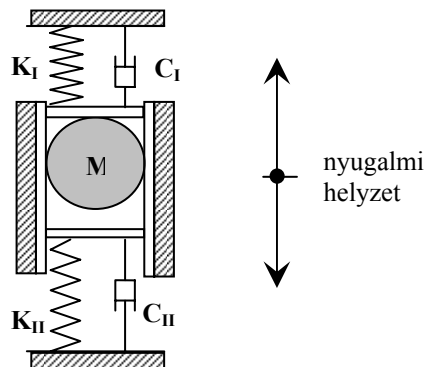
Kis impulzus esetén, amikor a repedések már a rezgés kezdetén sem záródhatnak, akkor a látszólagos sajátfrekvencia konstans és a gyengített gerenda sajátfrekvenciájával egyezik meg.

2.3.2. Lineáris modellek

A berepedt gerendákra, a nemlineáris rezgés első két látszólagos sajátfrekvenciájának közelítő számítására alkalmas, lineáris modelleket dolgoztam ki.

2.3.2.1. Első sajátfrekvencia közelítése egyszabadságfokú modellel

A berepedt gerenda első látszólagos sajátfrekvenciáját közelítő módon vizsgáltam egy helyettesítő, egyszabadságfokú modell nemlineáris rezgése segítségével (2.3.10. ábra).



2.3.10. ábra: Egyszabadságfokú modell

A 2.3.10. ábra szerinti rezgő rendszer a K_I , C_I elemei a repedészáródást, míg a K_{II} , C_{II} elemei a repedésmegnyílást reprezentálják. A modellben az M a repedésmentes gerenda 1. móduszához tartozó modális tömeget képviseli.

Először tekintsük azt az esetet, amikor az M csak tehetetlen tömeg, azaz nem hat rá súlyerő. Ekkor a nyugalmi helyzetben mindkét rugó feszültségmentes. A vizsgált tömegpont idő-kitérés diagramjának egy periódusa két különböző periódusú és amplitúdójú szinuszfélhullámból tevődik össze. E mozgás periódusidejét a két eltérő félperiódus összege adja. Ennek megfelelően a (helyettesítő) kvázi sajátfrekvencia $f_1^{(h)}$ a (2.3.6) közelítő képletből számítható [1]:

$$f_1^{(h)} \approx \frac{1}{\frac{1}{2f_1^I} + \frac{1}{2f_1^{II}}} \quad (2.3.6)$$

Az egyszabadságfokú modellt gerendára vonatkoztatva: f_1^I a repedésmentes gerenda első sajátfrekvenciája, f_1^{II} a középső szakaszon EI_{II} -re csökkentett hajlító merevségű berepedt gerenda első sajátfrekvenciája a lineáris számítás szerint. Az $f_1^I = 109$ Hz és az $f_1^{II} = 86$ Hz helyettesítésével $f_1^{(h)}$ értéke 96.1 Hz-re adódott.

A 2.3.1. ábra szerinti berepedt gerenda első látszólagos sajátfrekvenciáját (2.3.2. táblázat első sora) a (2.3.6) képlet jól közelíti, azonban a berepedt gerenda viselkedése kvalitatíve eltér az egyszabadságfokú modellétől.

Az önsúly okozta repedésmegnyílás elhanyagolásával a gerenda első módusza szerinti rezgés a következőképpen megy végbe. A gerendát nyugalmi helyzetéből a repedészáródásnak megfelelő irányba, az első rezgésalak szerinti hosszmenti kezdősebesség-eloszlással elindítva, az első fél periódusban a mozgást a repedésmentes gerendára vonatkozó differenciálegyenlet ismert szinuszos megoldása írja le. A kezdéstől számított fél periódus elteltével a nyugalmi helyzet $x = 0$ vonalán áthaladva, repedések megnyílnak és a merevségi viszonyok megváltoznak. A pillanatnyi sebesség eloszlása - mely éppen a kezdeti sebességeloszlás ellentettje - már nem felel meg az új konfiguráció szerinti első sajátrezgési

alaknak. Ennek következtében – a szimmetriából kifolyólag – a megváltozott merevségű tartó összes páratlan rezgésalakja gerjesztésre kerül. A periódus befejeződésével a tartó pontjai már nem egyszerre haladnak át az x tengelyen. A következő félperiódusban, amikor a repedések ismét záródnak, a gerenda kitérése már nem írható le egy szinusz félhullámmal, mert az összes páratlan sorszámú rezgésalak megjelenik, a nagyobb sorszámúak természetesen egyre csökkenő amplitúdóval. A hullámok interferenciája magyarázza a 2.3.6. ábra szerinti spektrumban a 200 Hz ill. a 300 Hz közelében jelentkező kisebb csúcsokat.

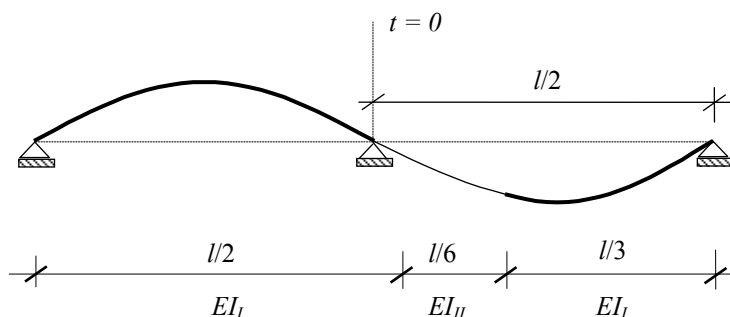
A 2.3.10. ábra szerinti modell M -nek súlyos tömegként való figyelembevételével mellett is működik. Ebben az esetben a K_{II} rugó már nyugalmi helyzetben is terhelt állapotban van, ami megfelel az önsúly okozta repedésmegnyílás figyelembevételének. A (2.3.6) formula emiatt érvényét veszti. Az eddigiekből nyilvánvaló, hogy az $f_1^{(h)}$ frekvencia számításához szükség van az önsúly és az indító impulzus viszonyának ismeretére is. Az önsúly jelenléte a modellben a K_{II} rugó aktív voltát, illetve a gerenda repedezett részén az EI_{II} hajlítómerevség érvénytartamát időben kiterjeszti. Emiatt a látszólagos sajátfrekvencia kisebb lesz.

Megállapítható, hogy a csak tehetetlen tömeggel rendelkező egyszabadságfokú modell a berepedt gerenda látszólagos sajátfrekvenciájának felső korlátját szolgáltatja, mivel a K_I (és az ennek megfelelő EI_I) merevség érvénytartama a leghosszabb. Ezzel a 2.3.1. táblázatban a spektrumbeli főcsúcs elhelyezkedésére megadott intervallum szűkíthető, mivel a (2.3.6) egy kisebb felső korlátot jelent. Ha M súlya olyan nagy, hogy az egyszabadságfokú modellben a K_{II} rugó egyáltalán nem tehermentesül, illetve a gerenda önsúly akkora, hogy egyik keresztmetszetében sem keletkezik a rezgés folyamán negatív nyomaték, akkor a látszólagos sajátfrekvencia alsó korlátját kapjuk. A gerendánál ez a „gyengített” szerkezethez tartozó sajátfrekvenciát jelenti.

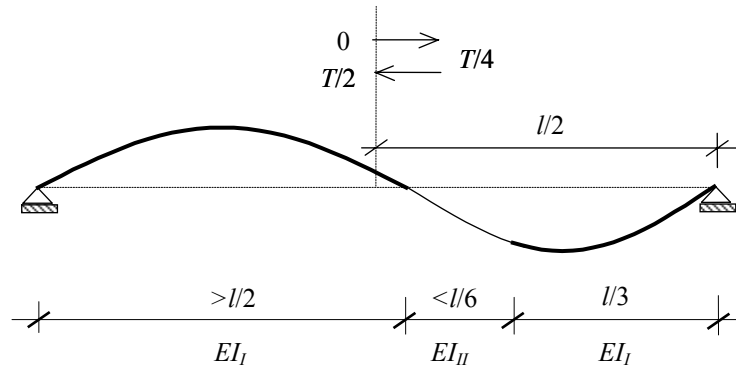
2.3.2.2. Második sajátfrekvencia közelítése

A berepedt gerenda második látszólagos sajátfrekvenciáját ugyancsak lineáris számítási modellek alkalmazásával közelítettem.

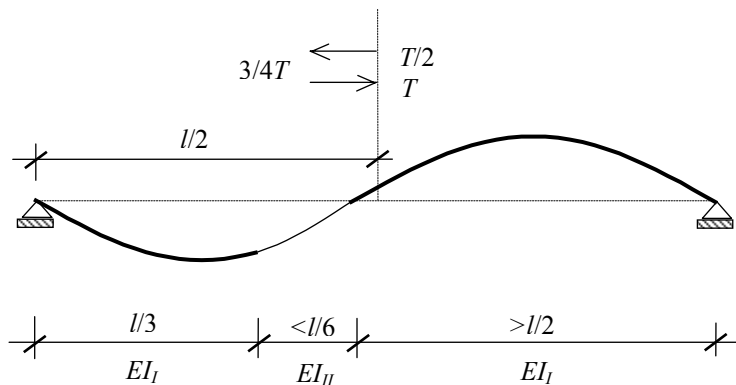
Vizsgáljuk először a 2.3.1. ábra szerinti gerenda nemlineáris rezgését az önsúly okozta repedésmegnyílás elhanyagolásával, melyet a repedésmentes gerenda második móduszára jellemző, teljes szinuszhullám alakú, hosszmenti kezdősebesség-megoszlással indítunk el a nyugalmi helyzetéből. A 2.3.11. ábrán a rezgés különböző fázisai láthatók (a 2.3.11b és 2.3.11c ábrák vízszintesen torzított léptékben). Az ábrázolt rezgési alakokban az aktuálisan EI_I hajlítómerevségű szakaszokat vastagabb, az aktuálisan EI_{II} hajlítómerevségű szakaszokat pedig vékonyabb vonal jelzi.



2.3.11a ábra: Sebességeloszlás és statikai váz a $t = 0$ időpontban



2.3.11b ábra: Rezgésalak az első félperiódusban



2.3.11c ábra: Rezgésalak a második félperiódusban

A rezgés indításakor, a $t = 0$ időpontban a gerenda mezőközepén lévő pontja hasonlóan, mint a repedésmentes gerenda esetén, az elmozdult alak inflexió pontja. A 2.3.11a. ábrán $t = 0$ időpontban a berepedt gerenda rezgési állapotát a háromtámaszú, $l/2$ támaszközű tartóval modellezhetjük. A mezőközepén alkalmazott csuklós támasszal az inflexió pont kezdeti helyzetét írjuk elő.

A gerenda rezgését az első félperiódusban a 2.3.11b ábra szemlélteti. A tartó mozgása közben a repedezett tartománynak az inflexió ponttól jobbra eső szakaszán a repedések megnyílnak, így itt a hajlítómerevség EI_{II} értéket vesz fel. A ponttól balra a repedések zárva maradnak ezért itt a hajlítómerevség továbbra is EI_I . A merevségek aszimmetriája miatt ez az állapot nem maradhat fenn, az inflexió pont a mezőközepétől fokozatosan jobbra - a lágyabb tartószakasz irányába - mozdul el, miközben az EI_{II} inerciájú tartomány hossza kismértékben csökken. Szélső helyzetét negyed periódusidő elteltével éri el. A "szélső helyzet" csak a gerenda valamely kiválasztott pontjára értelmezhető, mert a merevségek folytonos változása miatt a gerenda egyes pontjai nem pontosan egyszerre érik el a maximális kitérésüket.

A második félperiódusban, a 2.3.11c ábra szerint, a mezőközepétől jobbra illetve balra eső tartószakaszok szerepet cserélnek, vagyis a merevség-eloszlás tükröződik a mezőközépre, az EI_{II} merevségű szakasz hossza az első félperiódus szerintivel azonos módon változik, így a két félperiódusban a rezgés jellemzői azonosak lesznek.

A fentiek értelmében az inflexió pont a mezőközép körül a rezgőmozgás periódusának megfelelően oszcillál. Ennek megfelelően a második módusz szerinti nemlineáris rezgést az jellemzi, hogy egy periódusa alatt a berepedt szakaszon az EI_{II} inerciájú tartomány hossza folyamatosan változik.

A merevség-eloszlás fent ismertetett periodikus jellegű változását felhasználva, a berepedt gerenda második látszólagos sajátfrekvenciájára a 2.3.1. táblázat szerintinél egy jobban közelítő alsó és felső korlát adható meg, lineáris modellek kombinálásával, az alábbi módon.

A 2.3.11a ábra szerinti modell a vizsgált nemlineáris rezgés második látszólagos sajátfrekvenciájának egy alsó korlátját adja. A $t = 0$ időpontban ugyanis a legnagyobb ($l/6$) az EI_{II} merevségű tartószakasz hossza. Az 2.3.1. ábra szerinti berepedt gerenda második látszólagos sajátfrekvenciáját a rezgés kezdetekor a 2.3.11a. ábra szerinti háromtámaszú, $l/2$ támaszközű tartó első sajátfrekvenciája közelíti.

A 2.3.11b ábra szerinti konfiguráció a $t = T/4$ időpontban a gerenda második látszólagos sajátfrekvenciájának egy felső korlátját adja, mert ekkor legkisebb az EI_{II} merevségű tartószakasz hossza. Ez a hossz a (2.3.3) feltételnek megfelelően a repedezett tartomány pozitív görbületű részére terjed ki, melyet a második rezgésalak inflexiós pontja határol. Helye a lineáris számításban az EI_{II} inerciájú tartomány hosszának iteratív változtatásával határozható meg.

Sűrű felosztású végeelem modellen végzett modális analízis azt mutatta, hogy az inflexiós pont vándorlása csekély. A konfiguráció módosulása (2.3.11a-ról 3.11b-re) a második sajátfrekvencia 1%-nál kisebb változását okozza, a 3.11a esetben 417.4 Hz, míg a 3.11b esetben 417.6 Hz adódott. Az önsúly okozta repedésmegnyílás nélküli esetre a két fenti számítás átlaga, 417.5 Hz fogadható el második látszólagos sajátfrekvenciaként. A számítást az AXIS programrendszer felhasználásával végeztem.

Az önsúly okozta repedésmegnyílás figyelembevétele itt is hasonló eredménnyel jár, mint ahogyan azt az első látszólagos sajátfrekvencia esetében láttuk. Az önsúly okozta repedésmegnyílás nélküli eset a látszólagos sajátfrekvencia felső korlátját, a túlságosan nagy állandó teher esetén a repedészáródás elmaradása miatt az alsó korlátot a gyengített gerenda szolgáltatja.

2.3.3. A kísérleti eredmények és a numerikus szimulációk összehasonlítása

A hajlítórezgéseket végző berepedt vasbetongerenda hajlítómerevsége a berepedt szakaszon időben kvázi-periodikus jelleggel változik. Emiatt a rugalmas tartományban is nemlineáris a rezgés. A repedezett zóna geometriai nemlinearitás forrása.

Először lineáris számítási modellekkel előállítottam a vizsgált berepedt vasbetongerenda látszólagos sajátfrekvenciáinak alsó és felső korlátját.

Ezután nemlineáris numerikus vizsgálat keretében a berepedt gerenda rezgéseit modelleztem egy időlépéses algoritmus, Wilson módszerének felhasználásával. A numerikus számítási modell segítségével előállított szabadrezgési spektrum a kísérlet eredményével jó egyezést mutató első látszólagos sajátfrekvenciát szolgáltatott. A kísérlet során az első látszólagos sajátfrekvencia közelében kimutatott mellékcsúcs a numerikus vizsgálatban is igazolást nyert. Megállapítottam, hogy a spektrumban talált kettős csúcs az önsúlynyomaték és a csillapítás, valamint a kezdeti impulzus megfelelő viszonya esetén alakul ki.

A berepedt gerendáknál a spektrumban megjelenő kettős csúcs általában csak kisebb méretű gerendákon figyelhető meg, ahol az indító impulzus nyomán kialakuló rezgés több periódusán keresztül is megvalósul a periodikus jellegű repedészáródás. A periodikus jellegű repedészáródás hatása legerőteljesebben az első móduszban jelentkezik és a módusz sorszámának növekedésével csökken.

Végül két-két lineáris modell kombinálásával az önsúly okozta repedésmegnyílás nélküli esetben a nemlineáris vizsgálatnál egyszerűbb közelítő módszert mutattam be az első két látszólagos sajátfrekvencia meghatározására.

A számítások és a kísérlet eredményeit a 2.3.3. táblázat foglalja össze. A nemlineáris vizsgálatok és az egyszerűsített modellekkel végzett számítások a kísérlet eredményeivel jó egyezést mutatnak. A táblázatból kitűnik továbbá, hogy a nemlineáris számítás igazolta a kísérletben kimutatott mellékcúcs létezését.

2.3.3. táblázat: Sajátfrekvenciák összehasonlítása.

Kísérlet és számítási módszerek	f_1 [Hz]	f_2 [Hz]
Kísérlet, berepedt gerenda	89, 98	
Lineáris számítás, repedésmentes gerenda	109	436
Lineáris számítás, gyengített gerenda	86	397
Nemlineáris számítás, önsúly okozta repedésmegnyílás nélkül	96	414
Nemlineáris számítás, önsúly okozta repedésmegnyílással	87, 93	
Új közelítő lineáris modellek	96.1	417.5

2.4. FESZÍTETT VASBETONGERENDA REZGÉSSZÁMÍTÁSA

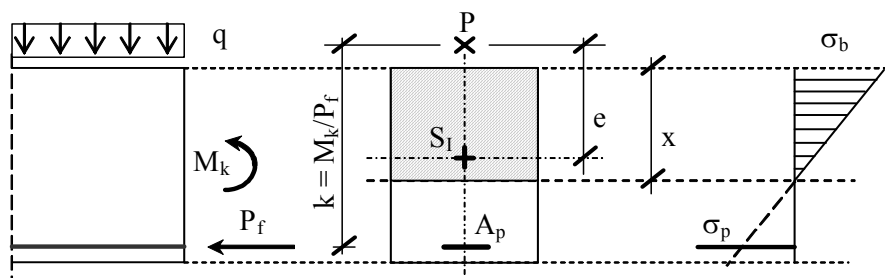
A hajlításra igénybevett, feszített vasbeton tartók dinamikai jellemzői a repedezettségi állapot mellett a hatásos feszítőerőtől is függenek. A repedezett szakasz keresztmetszeteiben a tényleges deformáció (görbület) a statikus és dinamikus nyomatéki igénybevétel mellett függ a feszítésből származó normálerő nagyságától is. Ezek a hatások a rezgő gerenda időben változó hajlítómerevségét eredményezik a repedezett szakaszon, ezért nemlineáris rezgés valósul meg.

Ebben a fejezetben a nemlineáris rezgés látszólagos sajátkörfrekvenciájának meghatározására mutatok be számítási módszereket. Kutatásomban a berepedt feszített tartó látszólagos sajátkörfrekvenciája és a hatásos feszítőerő kapcsolatát vizsgáltam numerikus szimuláció segítségével.

Az ismertett eljárások segítséget jelenthetnek a feszített vasbetonhidak állapotvizsgálatában, az időszakos dinamikai mérésekből nyert eredmények felhasználásával.

2.4.1. A repedezett szakaszon értelmezhető hajlítómerevség

A berepedt, külpontosan nyomott vasbeton keresztmetszet görbülete nem számítható a tiszta hajlításnál megszokott módon. A semleges tengely helyzete a normálerő külpontoságától függ, és ez a külpontoság befolyásolja a repedészáródást ill. megnyílást. A hajlításnak kitett, berepedt, feszített vasbetontartó is külpontosan nyomott elemnek tekinthető (2.4.1. ábra).



2.4.1. ábra: Hajlításnak kitett, berepedt feszített keresztmetszet

Az ábrán M_k a külső gerendaterhekből származó nyomaték. Az M_k és a P_f feszítőerő együtt a P_f -től k távolságra lévő P eredő normálerővel egyenértékű. Az S_1 a repedésmentes keresztmetszet súlypontja.

A külpontosan nyomott keresztmetszet hajlítómerevségét a görbület fogalmának segítségével értelmezhetjük (*Dulácska, E (1978)*, továbbá *Jankó, L (1986)*). A nyomott-hajlított tartó valamely keresztmetszetében a g görbület, szokásosan az alábbi módon definiálható:

$$g = \frac{\varepsilon_b}{x} = \frac{\sigma_b}{E_b x} = \frac{M}{E_b I}, \quad (2.4.1)$$

ahol: σ_b ill. ε_b a nyomott szélső szálban lévő betonfeszültség ill. beton összenyomódás. $E_b I$ a hajlítómerevség melyben az I a keresett keresztmetszeti jellemző.

A repedésmentes keresztmetszet S_1 súlyponti tengelyére vonatkozó nyomaték a külső teherből és a P_f feszítőerőből (2.4.1. ábra):

$$M = M_k - M_f = M_{k,din} + M_{k,stat} - M_f = P_f k - P_f (k - e) = P_f e. \quad (2.4.2)$$

A keresztmetszetre ható erők vetületi egyensúlyából:

$$\sigma_b = \frac{P_f}{S_d} x, \quad (2.4.3)$$

ahol: S_d a keresztmetszet dolgozó részének statikai nyomatéka a semleges tengelyre.

Behelyettesítve a (2.4.2) és (2.4.3) összefüggést (2.4.1)-be, az így kapott egyenletből kifejezhető a keresett keresztmetszeti jellemző:

$$I = I_g = S_d e. \quad (2.4.4)$$

Az I_g jellemzőt a szakirodalom görbületi inercianyomatéknak nevezi. A külpontosan nyomott keresztmetszet hajlítási merevsége tehát az eredő P normálerő külpontosságának függvénye ($|P| = |P_f|$).

Ha az eredő normálerő az ideális keresztmetszet belső magján belül támad, azaz $e < e_{maghatár}$, akkor a repedés zárul és ezzel összhangban a (2.4.4) összefüggés a repedésmentes keresztmetszet $I_{i,I}$ inercianyomatékát szolgáltatja. Ez a görbületi inercianyomaték felső korlátja. A másik szélső eset az, amikor $e \rightarrow \infty$, mely a tiszta hajlítás esetének felel meg. A repedés megnyílása ekkor legnagyobb. A (2.4.4) kifejezés a hajlított berepedt keresztmetszet feszültségszámításhoz használható $I_{i,II}$ inercianyomatékát adja. Ez jelenti a görbületi inercianyomaték alsó korlátját.

2.4.2. Alapfeltevések, lineáris és nemlineáris számítási modell

A dinamikus nyomatéki igénybevétel a rezgő, feszített tartó keresztmetszeteiben a P normálerő külpontosságának időbeli változását okozza. A berepedt szakaszon ezzel összhangban változik a tartó hajlítómerevsége is, melynek következménye a nemlineáris rezgés.

A berepedt feszített gerenda rezgésvizsgálatánál a következő alapfeltevéseket alkalmaztam:

- a tartó középső szakaszán a dinamikus teher működése előtt, repedéseket hoztak létre,
- a tartó anyaga lineárisan rugalmas a rezgés során fellépő igénybevételek tartományában,
- a rezgés kis elmozdulások mellett valósul meg,
- a csillapítást és a nyírási alakváltozást elhanyagolom,
- a feszítőerőnek a merevséget (geometriai merevségi mátrix) csökkentő hatását elhanyagolom. (Megjegyezhető, hogy a feszítés hatására a görbület miatt irányváltó erők is fellépnek, melyek stabilizáló hatásúak.)

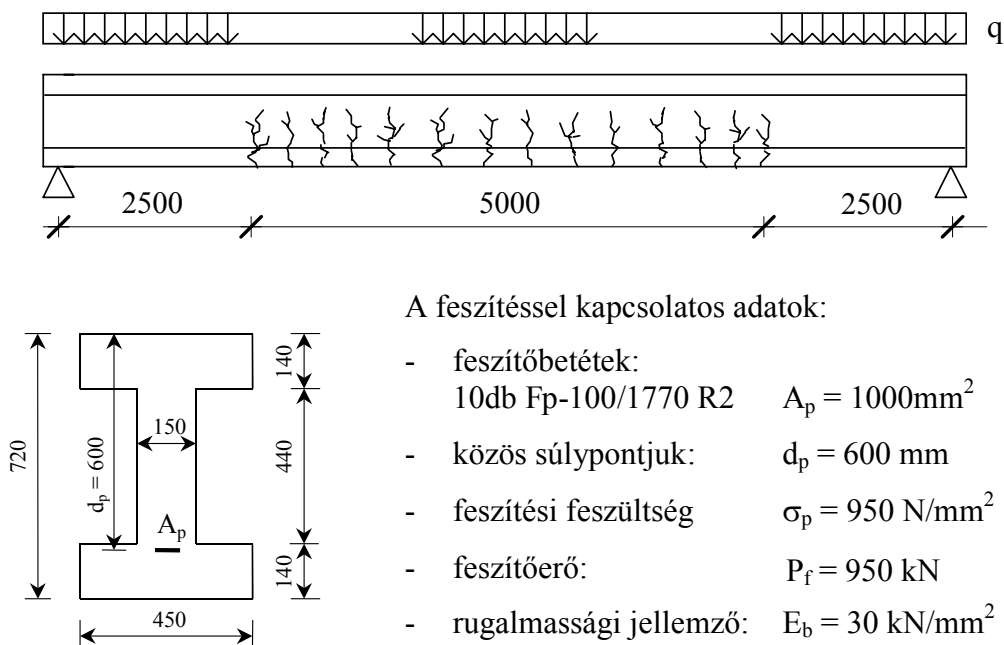
A repedezett tartományon a 2.3. fejezethez hasonlóan „elkent” repedésrendszert vettem figyelembe.

A lineáris számításokhoz a hossz mentén állandó hajlítómerevség esetén a (2.2.3) elemi összefüggést, változó merevség esetén a (2.3.2) valós sajátérték-feladatra készített MATLAB programot használtam.

A nemlineáris rezgés kitérés-idő diagrammjának előállításához a 2.2.4.1 fejezet szerinti Wilson módszert és a frekvenciák meghatározására Fourier-transzformációt alkalmaztam. A szabadon feltámaszkodó, berepedt, feszített vasbeton-gerendák rezgéseinek nemlineáris vizsgálatához a normál vasalású esetre kidolgozott MATLAB programot úgy módosítottam, hogy beépítettem a (2.4.4) görbületi inercianyomaték változását.

2.4.3. Mintapélda

A 2.2. fejezetben ismertetett számítási módszerek felhasználásával a 2.4.2. ábra szerinti berepedt, feszített “I” keresztmetszetű tartó csillapítatlan sajátrezgéseit vizsgáltam.



2.4.2. ábra: A vizsgált feszített tartó hossz- és keresztmetszete. (A méretek mm-ben értendők)

A tartó középső 5.0 m hosszú szakasza repedezett. A számításban a 10 m teljes hosszat 32 egyenlő részre osztottam fel. A rezgést az $x = l/4$ keresztmetszetre mért ütéssel, egy $F_0\Delta t$ impulzussal indítottam a (2.4.5) összefüggés szerint.

$$F(t,x) = \begin{cases} F_0 & ha \quad t \leq \Delta t \quad és \quad x = l/4, \\ 0 & ha \quad t > \Delta t. \end{cases} \quad (2.4.5)$$

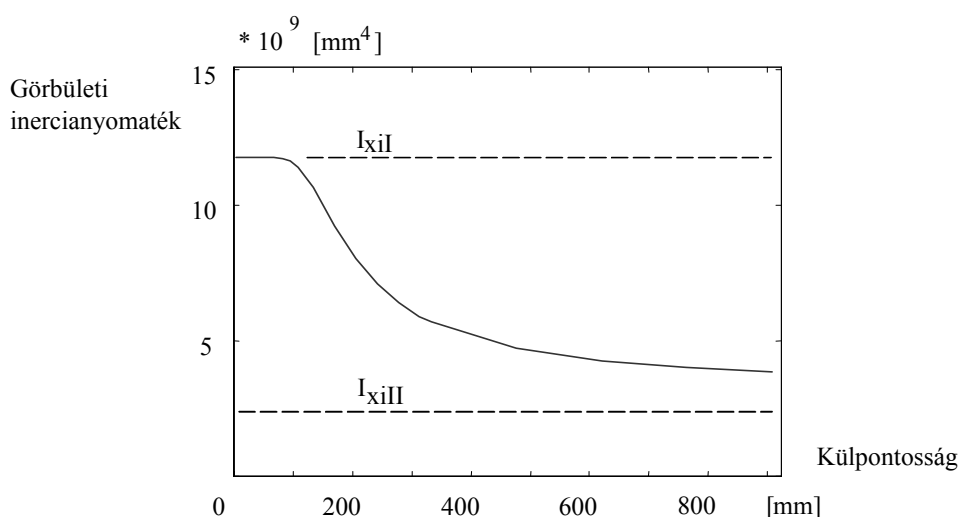
2.4.3.1. Lineáris és nemlineáris rezgésszámítás

A gerendára teljes hossza mentén egyenletesen megoszló $q = 45$ kN/m statikus teher hat, mely a $P_f = 950$ kN hatásos feszítőerővel együtt repedésmegnyílást okoz a középső tartományban. A tartón csillapítatlan rezgés feltételezésével háromféle számítást végeztem el a sajátkőrfrekvenciák meghatározására:

- lineáris számítás repedésmentes tartón a statikus teher, mint együttmozgó tömeg figyelembevételével,
- lineáris számítás a berepedt tartón a statikus nyomatékból számított időben állandó hajlítómerevséggel,
- nemlineáris számítás a berepedt tartón a statikus és dinamikus nyomatékból együttesen, időben változó hajlítómerevséggel.

Az a) esetben repedésmentes, a hossza mentén állandó $E_b I_{il}$ hajlítómerevségű tartó sajátkőrfrekvenciáit a (2.2.3) elemi összefüggéssel számítottam.

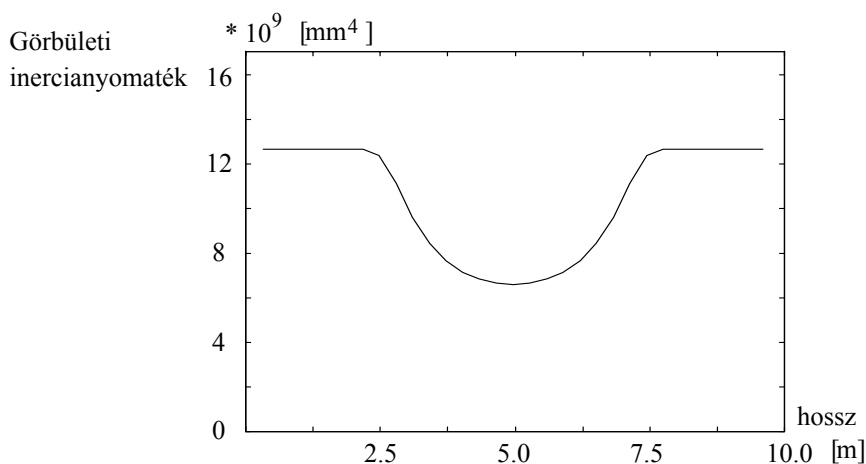
A b) számítást repedezett tartón végeztem el. A tartó keresztmetszeteiben a hajlítómerevséget az 2.4.1. fejezetben ismertetett módszerrel határoztam meg. Ehhez először előállítottam a tartó keresztmetszetére vonatkozó külpontosság-görbületi inercianyomaték diagrammot (2.4.3. ábra). A (2.4.2) értelmében a külpontosság az eredő nyomatékkal arányos. Az ábrából kitűnik, hogy a feszített tartó hajlítómerevsége a hajlítónyomaték függvényében folytonosan változik az EI_{il} és EI_{iII} szélső értékek között.



2.4.3. ábra: A göbületi inercianyomaték a normálerő külpontosságának függvényében

A nemfeszített tartó hajlítómerevsége ezzel szemben, mint láttuk ugrásszerű változást mutat és lépcsős függvénnyel, a (2.3.3), vagy a (2.3.5) szerint írható le.

A statikus nyomatékból és a hatásos feszítőerőből az egyes osztópontokban rendre számítottam a külpontosságot, majd a 2.4.3. ábra szerinti függvényből interpolációval kaptam az osztópontokban érvényes hosszmenti I_g görbületi inercianyomatékokat (2.4.4. ábra).



2.4.4. ábra: A görbületi inercianyomaték változása a hossz mentén (“b” számítás)

Az így adódó $E_b I_g$ folytonos görbe szerinti hajlítómerevségekkel a (2.3.2) alapján a differenciámódszer szerint képezett valós sajátérték feladatból kiszámíthatók a saját-körfrekvenciák közelítő értékei. A közelítés abból adódik, hogy a lineáris számítás elhanyagolja a dinamikus igénybevételek hatására bekövetkező merevségingadozásokat.

A “c” számítás esetében a rezgés idősorát a 2.2.4.1 fejezetben ismertetett Wilson-féle időlépéses algoritmussal számítottam, időlépésenként rendre megújítva a merevségi mátrixot. A keresett rezgési jellemzők a – 10 sec hosszúságú – lehajlás-idő diagramm diszkrét Fourier-transzformációjából adódnak. A számítást egy kisebb és egy nagyobb kezdő impulzusra végeztem el. Az ezekhez tartozó w_{din}/w_{stat} arányok a táblázatban láthatók.

A 2.4.2. ábra szerinti tartó lineáris és nemlineáris számítással nyert sajátkörfrekvenciáit a 2.4.1. táblázatban hasonlítom össze.

2.4.1. táblázat: lineáris és nemlineáris módszerrel számított látszólagos sajátkörfrekvenciák

Számítási módszerek		ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω_3 [Hz]
Lineáris számítás “a”, a hossz mentén $E_b I_{II} = \text{const}$		28.3	113.3	255.0
Lineáris számítás “b” berepedt tartó, időben állandó hajlítómerevségek		22.7	102.6	227.8
Nemlineáris számítás “c” időben változó merevségek	$w_{din}/w_{stat} = 0.18$	22.4	101.7	225.8
	$w_{din}/w_{stat} = 0.35$	22.2	101.2	224.9

A 2.4.1. táblázatból kitűnik, hogy a statikus lehajlásnál kisebb amplitúdójú rezgés nemlineáris “c” számítása szerinti sajátkörfrekvenciák alig különböznek a nyugalmi helyzethez tartozó merevségeloszlással elvégzett “b” lineáris számítás eredményeitől. Nagyobb w_{din}/w_{stat} esetén is csak kevésbé változik a “c” szerinti számítás eredménye.

2.4.3.2. Sajátkörfrekvenciák lineáris számítása változó feszítőerő mellett

A 2.4.2. ábra szerinti feszített gerenda sajátrezgéseit $q = 31$ kN/m statikus terhelés mellett is vizsgáltam. E csökkentett teher hatására a repedések éppen zárulnak. Tétélezzük fel,

hogy (pl. korrózió következtében) a feszítőerő fokozatosan az eredeti $P_f = 950$ kN-nak az 50%-ára csökken. Ha a statikus lehajláshoz képest kis amplitúdójú rezgéseket vizsgálunk, akkor a 2.4.1. táblázat alapján a sajátkőrfrekvenciák lineáris számítással, a (2.3.2) sajátérték-feladat alapján is elegendő pontossággal meghatározhatók.

A vizsgált tartó esetén a saját-kőrfrekvenciák és feszítőerő kapcsolatát a 2.4.2. táblázatban tüntettem fel.

2.4.2. táblázat: Sajátkőrfrekvenciák változó feszítőerő mellett.

Aktuális feszítőerő a kezdeti feszítőerőhöz viszonyítva	ω_1 [Hz]	ω_2 [Hz]	ω_3 [Hz]
1.00 P_f	34.1	136.1	305.0
0.90 P_f	33.7	135.9	302.6
0.80 P_f	31.5	133.4	291.0
0.70 P_f	27.7	124.9	276.1
0.60 P_f	24.3	113.2	260.9
0.50 P_f	21.8	103.2	247.2

Teljes P_f feszítőerő mellett a repedések záródása miatt a repedésmentes tartó sajátkőrfrekvenciáit kapjuk. Természetesen ezek nagyobbak az 2.4.1. táblázat "a" sorának értékeinél, mert jelen esetben kisebb az együttmozgó tömeg. A 2.4.2. táblázat szerint – az előzetes várakozásnak megfelelően – a saját-kőrfrekvenciák a feszítőerővel együtt csökkennek, de ez csak $0.90P_f$ alatt válik érzékelhetővé. A csökkenés az első sajátkőrfrekvenciánál jelentkezik a legerőteljesebben.

2.4.4. Megállapítások

A 2.4. fejezetben a berepedt, feszített tartó görbületének, látszólagos saját-kőrfrekvenciájának és a hatásos feszítőerőnek a kapcsolatát vizsgáltam numerikus szimuláció segítségével. Bemutattam továbbá az egyszerűsített lineáris számítási módszer alkalmazásának lehetőségét.

Az 2.4.1. táblázatból kiolvasható, hogy amennyiben a tartó rezgési amplitúdója kicsi a statikus lehajláshoz képest, akkor a keresett látszólagos saját-kőrfrekvencia lineáris számítással is elegendő pontossággal határozható meg, a statikus nyomatékokból a berepedt tartón számított merevségi paraméterek felhasználásával. Ennek oka, hogy repedések periodikus jellegű záródása miatt a feszített tartók rezgésekor a hajlítómerevség csak kisebb mértékben – folytonos függvény szerint – ingadozik, mint a nemfeszített gerendák esetén, melyeknél a változás lépcsős jellegű. Gyakorlati számítás céljára ez a közelítés alkalmazható nagyméretű feszített tartók, feszített vasbeton hidak esetében, ahol az önsúly és a hasznos teher statikus része együtt lényegesen nagyobb, mint a dinamikus hatást okozó hasznos teher.

A 2.4.2. táblázatot lineáris számítások alapján állítottam össze. A táblázat a hatásos feszítőerő függvényében adja meg a vizsgált tartó látszólagos sajátkőrfrekvenciáit. Az ismertetett számítási módszer alkalmazásával elkészíthető a feszített vasbeton tartó hatásos feszítőerő – sajátkőrfrekvencia diagramja. Az így előállított diagramm más vizsgálati módszereket kiegészítve, felhasználható feszített hidak időközi vizsgálatainál a híd általános állapotának jellemzéséhez.

3. ÖSSZEFOGLALÁS

Forgáspároloid-héj rezgésvizsgálata

Értekezésem első részében lapos, szabad peremű forgáspároloid-héj sajátrezgésének számításával foglalkoztam.

Először áttekintettem a vonatkozó szakirodalmat és a kutatásom kiindulásaként a hajlított lapos héjak statikai alapösszefüggéseit.

A dinamikai vizsgálathoz a lapos héjak Marguerre-féle differenciálegyenlet-rendszerét kiegészítettem a függőleges elmozdulásoknak megfelelő D'Alembert-féle erővel. A vékony, lapos, szabad peremű forgáspároloid-héj, illetve a gömbsüveghéj rezgéseit leíró parciális differenciálegyenlet-rendszer megoldására egy új analitikus módszert, a képzőfüggvényes eljárást alkalmaztam.

A képzőfüggvény alkalmazásának a legfontosabb előnye, hogy az operátormátrix determinánsával képezett karakterisztikus differenciálegyenlet megoldása után az összes ismeretlen függvény deriválással állítható elő, így nem kerülnek a megoldásba formálisan függetlennek látszó további integrálási konstansok. Másik előny, hogy a peremértékekre és peremderiváltakra vonatkozó peremfeltételek közvetlenül a képzőfüggvényre vonatkozó feltételként vehetők figyelembe. Ezt az eljárást *Hegedűs (1986)* szendvicserenda-feladat megoldásán mutatta be.

A képzőfüggvényes eljárás alkalmazásával a forgáspároloid-héj parciális differenciálegyenlet-rendszerében a koordináta-változókat szétválasztva a sugárirányú változóban egy nyolcadrendű közönséges differenciálegyenletre (a karakterisztikus differenciálegyenletre) jutottam, melynek megoldását hatvány- és Bessel-függvények alkotják. A gyűrűirányú viselkedést trigonometrikus függvények írják le. A w lehajlást és az F feszültségfüggvényt a karakterisztikus differenciálegyenlet megoldásából határoztam meg. Értekezésemben szabad peremű szerkezetet vizsgáltam. A differenciálegyenlet-rendszer és a peremfeltételek együttesen egy sajátérték-feladatot tűznek ki. Ennek megoldásával előállítottam a frekvenciaegyenletet a sajátfrekvenciák és a rezgési alakok meghatározásához.

A analitikus módszerhez MATLAB programot dolgoztam ki, mellyel példaképpen egy úrszerkezetként alkalmazható tányérantenna rezgéseit határoztam meg. Kiszámítottam a vizsgált forgáspároloid-héj rezgési sajátértékeit és sajátfrekvenciáit, valamint rezgési elmozdulás-alakjait. Az eredményeket végeelem program segítségével verifikáltam. Ábrázoltam a különböző típusú rezgési elmozdulás-alakokat, valamint metszeteiket. Megmutattam, hogy a forgáspároloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó alacsonyabb k móduszaihoz tartozó sajátértékek és lengési karakterisztikus hosszak komplexek, továbbá megadtam a valós értékre váltáshoz tartozó frekvencia-határt is.

Az analitikus eljárás alapján számításokkal összehasonlítottam a forgáspároloid-héj, valamint ennek specializációjával származtatható szabad peremű ágyazatlan körlemez és rugalmasan ágyazott körlemez rezgéseit. A vizsgált három szerkezetfajta különböző móduszaira kapott sajátfrekvenciák összevetésével megállapítható, hogy a forgáspároloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó rezgéseinek sajátfrekvenciái az ágyazatlan körlemezzel, míg az egy vagy több gyűrűirányú csomóvonalat tartalmazó rezgések frekvenciái a rugalmas ágyazású körlemezzel közelíthetők.

Vizsgáltam a geometriai jellemzők hatását is a forgáspároloid-héj sajátfrekvenciáira.

A képzőfüggvényes eljárással levezettem a nyírás alakváltozások figyelembevétele mellett is, a lapos forgáspároloid-héj illetve a gömbsüveg-héj frekvenciaegyenletét. A várakozásnak megfelelően, a nyírás alakváltozásnak csak az igen magas frekvenciáknál van szerepe.

Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgésvizsgálata

Doktori értekezésem második része a kéttámaszú berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgéseinek vizsgálatával foglalkozik. Először áttekintettem a vonatkozó szakirodalmat. Ezután összefoglaltam azokat a lineáris és nemlineáris számítási módszereket, melyeket a numerikus vizsgálataimban alkalmaztam. A számításokhoz MATLAB programokat dolgoztam ki, melyekben figyelembe vettem a periodikus repedészáródás hatását, mint a nemlineáris rezgés forrását. A nemlineáris rezgés esetén szigorúan véve csak „látszólagos” sajátfrekvenciákat értelmezhetünk.

• *A nemfeszített vasbetongerenda rezgésvizsgálata*

Egy impakt teherrel gerjesztett kísérleti gerenda szabadrezgésének vizsgálatához lineáris és nemlineáris számításokat végeztem.

- A többszabadságfokú modell lineáris rezgésvizsgálatára differenciámódszert használtam, ennek segítségével a rezgés sajátfrekvenciáira alsó és felső korlátokat állapítottam meg.
- A repedések lélegzéséből fakadó nemlinearitás figyelembevételéhez időlépéses algoritmust alkalmaztam (centrális differenciák módszere és Wilson módszere). Az időlépéses algoritmusra készített számítógépi eljárással a berepedt gerenda rezgését modellezve idősorokat állítottam elő. Ezekből a látszólagos sajátfrekvenciákat Fourier-transzformációval kaptam.
- A gerendakísérlet rezgési spektrumában az első sajátfrekvencia helyénél megjelenő kettős csúcsot numerikus szimulációval is sikerült előállítani, és ennek alapján magyarázatot találtam a jelenségre.
- Parametrikus vizsgálatot végeztem annak vizsgálatára, hogy az indító impulzus és a csillapítás változtatása hogyan befolyásolja a szabad rezgés spektrumát. Ebből megállapítottam, hogy a rezgés látszólagos sajátfrekvenciája a gerenda jellemzőin és repedezettségén túl még függ az indító impulzustól is.
- A diszkrét Fourier-transzformáció mozgó ablakos változatának alkalmazásával vizsgáltam a rezgés idősorának részleteit. Az idősor rövidebb szakaszokra bontásával előállítottam a látszólagos sajátfrekvencia időfüggvényét.
- Egyszerű lineáris modelleket dolgoztam ki az első és második látszólagos sajátfrekvencia közelítő meghatározására.
- Összehasonlítottam a kísérlet, valamint a különböző lineáris és nemlineáris számítások eredményeit.

• *A feszített vasbetongerenda rezgésvizsgálata*

- A rezgésvizsgálathoz szükséges alapösszefüggések felállításában felhasználtam a berepedt keresztmetszetre vonatkozó görbületi inercianyomaték fogalmát.
- A rezgés időlépéses algoritmussal való szimulációjából megállapítottam, hogy a periodikus repedészáródás hatása feszített gerendák esetén kisebb, mint a nemfeszített gerendáknál. Emiatt a statikus nyomatékokból meghatározott hajlítómerevségekkel elvégzett lineáris számítás elegendő pontosságú a sajátfrekvenciák meghatározásához.
- Numerikus szimulációval vizsgáltam a sajátrezgés frekvenciájának változását csökkenő hatásos feszítőerő függvényében. A sajátfrekvencia (alaplómódusz) esetleges megváltozása – másfajta vizsgálatok eredményeit is figyelembe véve – jelezheti a feszített tartó állapotában bekövetkezett kedvezőtlen változást.

4. AZ ÉRTEKEZÉS TÉZISEI

I. TÉZISCSOPORT: Forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálata

A forgásparaboloid-héj rezgésvizsgálatával kapcsolatos kutatási eredményeimet az alábbi tézispontokban foglalom össze:

- I.1. A lapos héjak elmélete alapján, új analitikus módszerrel – az egyéb célra már alkalmazott képzőfüggvényes eljárással – megoldottam a nyírási alakváltozásoktól mentes vékony, lapos, szabad peremű forgásparaboloid-héj ill. gömbsüveg-héj rezgésének differenciálegyenlet-rendszerét. E módszer lényege, hogy a héj rezgéseit leíró parciális differenciálegyenlet-rendszert, az operátormátrix determinánsának és adjungáltjának értelmezésén alapuló képzőfüggvényes eljárás alkalmazásával, redukáltam egy közöséges nyolcadrendű differenciálegyenletre [4].
- I.2. A kidolgozott képzőfüggvényes eljárással előállított frekvenciaegyenlet alkalmas a vékony, lapos, szabadperemű forgásparaboloid-héj valamennyi sajátfrekvenciájának és rezgési alakjának analitikus meghatározására [4].
- I.3. Analitikus úton és numerikusan is megmutattam, hogy a forgásparaboloid-héj gyűrűirányú csomóvonalat nem tartalmazó ($\ell = 0$) móduszai esetén az alacsonyabb k gyűrűirányú hullámszámú móduszokhoz tartozó $\alpha_{k,0}$ sajátértékek és l_k lengési karakterisztikus hosszak komplexek [3], melyek akkor váltanak valósra, ha a hozzájuk tartozó sajátkörfrekvencia értéke meghaladja az $\omega_o = c/R$ körfrekvencia értéket. (Ahol: c a transzverzális hullámterjedés sebessége a héj anyagában, R a forgásparaboloidhoz a tetőpontjában simuló gömb sugara).
- I.4. A képzőfüggvényes eljárással levezettem a nyírási alakváltozások figyelembevétel mellett is, a lapos szabadperemű forgásparaboloid-héj, illetve a gömbsüveg-héj frekvenciaegyenletét.

II. TÉZISCSOPORT: Berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgésvizsgálata

A berepedt vasbeton- és feszített betongerendák rezgésvizsgálatával kapcsolatos kutatási eredményeimet az alábbi tézispontokban foglalom össze:

- II.1. Szimmetrikusan berepedt vasbetongerendák rezgéseinek numerikus szimulációjával (időlépéses algoritmus és Fourier-transzformáció) megmutattam, hogy a repedések periodikus jellegű záródásának következménye a spektrumban megjelenő kettős csúcs az első sajátfrekvencia helyénél az önsúly, a csillapítás és az indító impulzus megfelelő viszonya esetén [1].
- II.2. Mozgó ablakfüggvényes Fourier-transzformációval megmutattam, hogy amennyiben kettős csúcs van az első sajátfrekvencia helyénél a berepedt vasbetongerenda rezgési spektrumában, akkor a gerenda rugalmas rezgéseinek látszólagos sajátfrekvenciája időben csökken.
- II.3. Numerikus szimulációval megmutattam, hogy berepedt vasbetongerenda periodikus jellegű repedészáródása esetén a rezgés látszólagos sajátfrekvenciája függ az indító impulzustól.
- II.4. A mezőközépre szimmetrikusan berepedt vasbetongerendáknál új lineáris modell bevezetésével egyszerű képletet adtam, a repedések periodikus jellegű záródása miatti nemlineáris rezgés első látszólagos sajátfrekvenciájának felső korlátjára. Modellt dolgoztam ki a második látszólagos sajátfrekvencia egymáshoz közeli alsó és felső korlátjának meghatározására is [1].
- II.5. Felhasználva a feszített vasbetongerendák görbületi inercianyomatékának kifejezését megmutattam, hogy a berepedt feszített tartók rezgésekor, a repedések periodikus jellegű záródása alatt, a hajlítómerevség csak kisebb mértékben ingadozik, mint a nemfeszített gerendák esetén. A nemlineáris rezgés emiatt megbízhatóan közelíthető egy helyettesítő lineáris vizsgálattal, a statikus nyomatékokból a berepedt tartón meghatározható merevségi paraméterek felhasználásával, ha a rezgés amplitúdói kicsik a statikus lehajláshoz képest. Egy modell segítségével megadtam a sajátfrekvenciáknak a feszítőerőtől való függését [2].

A TÉZISPONTOKHOZ KAPCSOLÓDÓ TUDOMÁNYOS KÖZLEMÉNYEK

- [1] Huszár, Zs.: “Investigation of Vibrations of Cracked Reinforced Concrete Beams”. Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae. Civil Engineering Vol. 108, No. 3-4, 1997-1999. pp. 357-367.
- [2] Huszár, Zs.: „Vibrations of Cracked Reinforced and Prestressed Concrete Beams”. IABSE SYMPOSIUM, Budapest 2006. szept. 13-15. Az előadás teljes szövege megjelent: IABSE REPORT Vol.92 CD-ROM, file: A-0337. pdf. pp. 1-8.
- [3] Huszár Zs.: „Kontinuummal modellezhető szerkezetek rezgésvizsgálata”. MTA-BME Műszaki Mechanika Kutatóközösség konferenciájának kiadványa 2002. pp. 31-36.
- [4] Huszár, Zs. - Hegedűs, I.: “Free Vibrations of a Paraboloid Shell”. Periodica Polytechnica Civil Engineering Vol. 49, No.1, 2005. pp. 13-26.

A DINAMIKA TÉMAKÖRBE MEGJELENT TOVÁBBI PUBLIKÁCIÓIM

Külföldön megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk

- [5] Huszár, Zs.: “Vibrations of Cracked Reinforced and Prestressed Concrete Beams”. Facta Universitatis Series: Architecture and Civil Engineering Vol. 6, No 2, 2008, pp. 155 – 164 DOI:10.2298/FUACE0802155H

Magyarországon megjelent idegen nyelvű folyóiratcikk

- [6] Huszár, Zs.: “Vibrations of Non-uniform Tower Constructions. Concrete Structures”. Annual Technical Journal. Hungarian Group of fib. Vol. 4, 2003. pp. 54-58.

Nemzetközi konferencia-kiadványban megjelent idegen nyelvű előadások

- [7] Huszár, Zs.: “Dynamic Analysis of Constructions Modelled by Non-uniform Cantilever”. 11th European Conference on Earthquake Engineering, Párizs 1998. szept. 6-11. Balkema Rotterdam 1998. CD-ROM ISBN 90 5410 9823.
- [8] Huszár, Zs.: “Linear and Non-linear Modelling of Dynamic Behaviour of Cracked Reinforced Concrete Beams”. 1th Albert Caquot International Conference, Párizs 2001. okt. 3-5. Presses Ponts et chaussées,

Magyar nyelvű folyóiratcikkek

- [9] Huszár Zs.: „A repedezettség hatása a vasbetongerendák rezgéseire” I-II. Beton 1997. 5 sz. pp. 13-16; 1997. 6 sz. pp. 19-21.
- [10] Huszár Zs.: “Vékonyfalú, nyitott, egyszerűen szimmetrikus szelvényű rúd hajlító és csavaró lengései”. Építés - Építészettudomány 2000. XXVII. kötet 3-4. sz. pp. 209-224.
- [11] Huszár Zs.: “Változó inerciájú konzoltartók csillapítatlan szabadrezgéseinek vizsgálata”. Építés - Építészettudomány 2001. XXIX. kötet 1-2. sz. pp. 155-168.

BME közlemények

- [12] Huszár Zs.: „Berepedt vasbeton gerendák dinamikai modellezése”. BME Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 1997. pp. 75-80.
- [13] Huszár Zs.: „Változó inerciájú konzoltartó csillapítatlan szabadrezgéseinek vizsgálata a Rayleigh hányadosra épülő eljárás segítségével”. MTA-BME Mechanikai Kutatóközösség VI. Tudományos Ülésszaka 1998. pp. 69-74
- [14] Huszár Zs.: „Megoszló normálerővel terhelt oszlop rezgésvizsgálata”. BME Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 1998. pp. 67-72.
- [15] Huszár Zs.: "U szelvényű rudak rezgésvizsgálata”. BME Vasbetonszerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 2000. pp. 119-130.
- [16] Huszár Zs.: “Berepedt, feszített vasbeton gerendák rezgéseinek vizsgálata”. BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke Tudományos Közleményei 2001. pp. 55-62.

Kivonatban megjelent konferencia-előadások

- [17] Huszár Zs.: „Berepedt vasbetongerenda rezgéseinek vizsgálata”. VII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc 1995. pp. 45.
- [18] Huszár Zs.: „Megoszló normálerővel terhelt oszlop rezgésvizsgálata”. VIII. Magyar Mechanikai Konferencia, Miskolc 1999. pp. 58.

KÖSZÖNETNYILVÁNÍTÁS

Szeretnék köszönetet mondani Dr. Hegedűs István egyetemi tanárnak. Értékes szakmai segítséget nyújtott az értekezésem mindkét témakörében.

Ugyancsak köszönetemet fejezem ki Dr. Hugo Bachmannak a Zürichi ETH professzorának, hogy másfél éves svájci ösztöndíj révén részt vehettem az ETH építőmérnöki karának posztgraduális képzésén, ahol dinamika témakörben szakmérnöki oklevelet szereztem. Köszönettel tartozom az ETH építőmérnöki karán oktató Pfaffinger és Anderheggen professzoroknak, akik előadásaikban megismertettek tartószerkezetek dinamikájának lényeges kérdéseivel.

5. IRODALOM

- Adams, R.D., D. Walton, J.E. Flitcroft, and D. Short, (1975), "Vibration Testing as a Nondestructive Test Tool for Composite Materials". Composite Reliability, ASTM STP 580, 159–175.
- Adams, R. D., Cawley, P., Pye, C. J. and Stone, B. J., (1978): "A vibration technique for non-destructively assessing the integrity of structures". Journal of Mechanical Engineering Science, Vol. 20, pp. 93-100.
- Alampalli, S Fu, G. and Dillon, E.W. (1997) "Signal versus noise in damage detection by experimental modal analysis". Journal of Structural Engineering 123, No. 2, pp. 237-245.
- Allen, H. G. (1969): „Analysis and Design of Structural Sandwich Panels”. Pergamon Press.
- Ballestros, P. (1978): „Non-linear dynamic and creep buckling of elliptical paraboloidal shells”. IASS Bulletin 66.
- Bastianini, F., Rizzo, A., Galati, N., Deza, U., Nanni, A. (2005): "Discontinuous Brillouin strain monitoring of small concrete bridges: Comparison between near-to-surface and "smart" FRP fiber installation techniques". Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering 5765 (PART 2), pp. 612-623.
- Bathe, K. J. and Wilson, E. L. (1976): "Numerical Methods in Finite Element Analysis." Prentice Hall, Inc., Englewood Cliffs, N. J.,
- Benaroya, H. (2005): "Mechanical Vibration, Analysis, Uncertainties and Control". CRC Press. pp. 747. USA.
- Blevins, R. D. (1984): "Formulas for Natural Frequencies and Mode Shapes". Krieger Publishing Company. Florida.
- Budiansky, B. and Roth, R.S. (1962): „Axissymmetric dynamic buckling of clamped shallow spherical shells". NASA TN D-1510, pp. 597-606.
- Carden, E. P. and Fanning, P. (2004) "Vibration Based Condition Monitoring: A Review" Structural Health Monitoring; Vol:3; pp. 355-377
- Casas, J. R. and Aparicio, A. C. (1994): "Structural damage identification from dynamic-test data". Journal of Structural Engineering 120, No. 8, pp. 2437-2450.
- Chu, Van Nguyen (1994): "A hajlított tartók dinamikai viselkedése különböző feszültségállapotokban". Kandidátusi értekezés.
- Clough, R. W., Penzien, J. (1975): "Dinamics of Structures". Mc Graw-Hill Book Company, New York,
- Csonka P. (1981): "Héjszerkezetek". Akadémiai kiadó Budapest.
- Dehaven, J. G.; Han, Y.; Tzou, H. S. (2007):"Transition of Membrane/Bending Neural Signals on Transforming Adaptive Shells". Journal of Vibration and Control 13(7) pp. 1007–1029,
- Dieterle, R. Bachmann, H.,(1980): "Einfluss der Rissbildung auf die Dynamischen Eigenschaften von Leichtbeton- Betonbalken". Schweizer Ingenieur und Architekt Vol. 98 No. 32/80. pp. 715-721.

- Duggan, D. M., Wallace, E. R., and Caldwell, S. R. (1980): "Measured and Predicted Vibrational Behavior of Gulf of Mexico Platforms". in Proc. 12th Annual Offshore Tech. Conf., pp. 92-100.
- Dulácska, E. (1978): "A rugalmas vasbetonrúd kihajlása. Építés- és Építészettudomány". X. 1-2 pp. 45-65.
- Eccles, B. J., Owen, J. S., Woodings M. A., Choo, B. S. (1997): "A proposed new approach to full life qualitative bridge assessment". Structural Faults and Repair Conference Edinburgh.
- Efstathiades, G. J. (1971): "A new approach to the large-deflection vibrations of imperfect circular disks using Galerkin's procedure," Journal of Sound and Vibration, vol. 16, no. 2, pp. 231-253.
- Farrar, C. R. and Jauregui, D. A. (1998): "Comparative study of damage identification algorithms applied to a bridge I. II.". Smart Materials and Structures, No. 7, pp. 704-731.
- Flügge, W. (1973): "Stresses in Shells". Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York.
- Forde, M.C., McCavitt, N. (1993): "Impulse radar testing of structures". Proceedings of the Institution of Civil Engineers: Structures and Buildings 99 (1), pp. 96-99
- Garg, A. K., Khare R.K. and Kant T. (2006): „Higher-order Closed-form Solutions for Free Vibration of Laminated Composite and Sandwich Shells". Journal of Sandwich Structures and Materials 8; 95
- Girkmann, K. (1954): "Flächentragwerke". Springer-Verlag, Wien.
- Godoy, L. A. and De Souza, V. C. M. (1998): „Vibrations of Shallow Shells due to Removal of Formwork". Journal of Sound and Vibration 1998, (215)3, pp. 425-437
- Graps, A (1995): "An introduction to Wavelets". IEEE Computational Science and Engineering.
- Györgyi, J (2006): "Szerkezetek dinamikája". Műegyetemi Kiadó. Budapest.
- Hegedűs, I. (1986): „Mérnöki kontinuum feladatok differenciálegyenleteinek származtatása variációs elven". Építési kutatás, fejlesztés 1986/2.
- Hegedűs, I. (1979): „Buckling of Axially Compressed Cylindrical Sandwich Shells". Acta Technica Academiae Scientiarum Hungaricae, Tomus 89 (3-4) pp. 377-387.
- Hegedűs, I. (2000): "Héjszerkezetek". Egyetemi Jegyzet. Tankönyvkiadó Budapest.
- Hemez, F.M., (1993): "Theoretical and Experimental Correlation Between Finite Element Models and Modal Tests in the Context of Large Flexible Space Structures". Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace Engineering Sciences, University of Colorado, Boulder.
- Huang, N. (1964). "Unsymmetrical Buckling of Thin Shallow Spherical Shells", Journal of Applied Mechanics, 31: 447-457
- Jahnke-Emde-Lösch (1960): „Tafeln höherer Funktionen". B. G. Teubner Verlagsgesellschaft, Stuttgart.
- Jankó, L. (1986): "A külpontosan nyomott vasbeton keresztmetszet közelítő görbületszámítási eljárásának pontossága". Mélyépítéstudományi Szemle, 12. Szám
- Kabir, H. R. H. (2002): "Application of linear shallow shell theory of Reissner to frequency response of thin cylindrical panels with arbitrary lamination". Composite Structures Vol. 56 pp. 35-52

- Kim, J. H., Jeon, H. S., Lee, C. W. (1992): "Application of Modal Assurance Criteria for Detecting and Locating Structural Faults." Proc. 10th International Modal Analysis Conference. Pp. 536-540.
- Kollár, L. P. (1991): „Stability analysis of composite sandwich shells”. International Colloquium on Buckling of Shell Structures. Lyon, France
- Kollár, L. P. (1993) „Temperature induced stresses and deformation in composite shells” Proceedings of the 1993 9th International Conference on Composite Materials, ICCM/9. Madrid, Spain
- Korn, G. A. and Korn, T. M. (1975): "Matematikai Kézikönyv Műszakiaknak". Műszaki Könyvkiadó Budapest.
- Leissa, A. W. (1969): "Vibration of plates". Washington Scientific and Technical Information Division Office of Technology Utilization National Aeronautics and Space Administration.
- Loland, O. and Dodds, J. C., (1976): "Experience in developing and operating integrity monitoring system in north sea", in Proc. of the 8th Annual Offshore Tech. Conf., pp. 313-319.
- Love, A. E. H (1927): „A Treatise on Mathematical Theory of Elasticity". 4th ed., Dover, New York.
- Márkus, Gy. (1964) „Körszimmetrikus szerkezetek elmélete és számítása". Műszaki Könyvkiadó.
- Moslem, K. and Nafaspour, R. (2002): "Structural damage detection by genetic algorithms". AIAA Journal 40(7), pp 1395-1401.
- Ndambi, J, Mulambula, M. (2002): "Damage assessment in reinforced concrete beams by damping analysis", Ph.D. dissertation, Mechanics of Materials and Constructions, Vrije Universiteit Brussel, Belgium.
- Nie, G.H. (2001): "Asymptotic Buckling Analysis of Imperfect Shallow Spherical Shells on Non-Linear Elastic Foundation". International Journal of Mechanical Sciences, 43: 543–555.
- Pandey, A.K., Biswas M., and Samman, M.M. (1991): "Damage Detection from Changes in Curvature Mode Shapes," Journal of Sound and Vibration, 145(2), 321–332.
- Pandey, A.K. and Biswas, M. (1994): "Damage detection in structures using changes in flexibility". Journal of Sound Vibration, 169(1): 3-17.
- Penny, J.E.T., Wilson, D.A.L. and Frishwell, M.I. (1993), "Damage Location in Structures Using Vibration Data". Proc. Of the 11th International Modal Analysis Conference, pp 851-867.
- Pfaffinger, D. D. (1988): "Tragwerksdynamik". Springer Verlag, Wien, New York.
- Pluzsik, A. (2000): "Natural frequencies of axissymmetrical shells with free edges". Proceedings of the 3rd International PhD Symposium in Civil Engineering. Vienna.
- Ponomarjov, Sz. D. Biedermann, V. L. Liharjev, K. K. Majusin, V. L. Malinyin, N. M. Feodoszjev, V. I. (1966): „Szilárdsági számítások a gépészetben. Rezgések, ütések. 6. kötet". Műszaki Könyvkiadó, Busapest.
- Ramirez, R.W. (1985) "The FFT: Fundamentals and Concepts". Prentice-Hall. Englewood Cliffs, New Jersey, USA.

- Rayleigh, J. W. S. (1945): „The Theory of Sound. New York, Dover Publications”.
- Reddy, J. N. (2004): „Mechanics of Laminated Composite Plate and Shells”. CRC Press. pp. 856. USA.
- Rizos, P.F., Aspragathos, N. and Dimarogonas, A.D. (1990): “Identification of Crack Location and Magnitude in a Cantilever Beam from the Vibration Modes”. *Journal of Sound and Vibration*, 138(3), 381–388.
- Rytter, A., (1993): “Vibration based inspection of civil engineering structures”. Ph. D. Dissertation, Department of Building Technology and Structural Engineering, Aalborg University, Denmark.
- Salawu, O. S. and Williams, C. (1993). “Structural damage detection using experimental modal analysis”. *Proc. Of the 11th International Modal Analysis Conference, Kissimmee, Florida*, pp 254-260.
- Salawu, O.S. (1995): “Nondestructive Assessment of Structures Using the Integrity Index Method Applied to a Concrete Highway Bridge,” *Insight*, 37(11), 875–878.
- Sanders, Jr., J. L. (1959): „An Improved First Approximation Theory for Thin Shells”. NASA Technical Report, R-24.
- Shang, Xin-Chun (2001) „An Exact Analysis for Free Vibration of a Composite Shell Structure Hermetic Capsule”. *Applied Mathematics and Mechanics* Vol. 22, No 9, Sept.
- Soedel, W. (1986) „Vibration of shells and plates”. New York, Marcel Dekker Inc.
- Stubbs, N., Kim J.T., and Topole, K. (1992): “An Efficient and Robust Algorithm for Damage Localization in Offshore Platforms”, in *Proc. ASCE Tenth Structures Congress*, 543–546.
- Stubbs, N., Kim, J.T. and Farrar, C.R. (1995): “Field Verification of a Nondestructive Damage Localization and Severity Estimation Algorithm”, in *Proc. 13th International Modal Analysis Conference*, 210–218.
- Taeprasartsit, S., Tao, K. E. (2005) „Effect of Shell Geometry and Material Constants on Dynamic Buckling Load of Elastic Perfect Clamped Spherical Caps” *Asian Journal of Civil Engineering (Building and Housing)* Vol. 6, No. 4 pp. 303-315
- Thurston, G.A. (1961): „A Numerical Solution of the Nonlinear Equations for Axisymmetric Bending of Shallow Spherical Shells”. *Journal of Applied Mechanics*, 38: 557–562.
- Timoshenko, S (1955): “Vibration problems in Engineering”. D. Van Norstand Company Inc., New York.
- Timoshenko, S. és Woinowsky–Krieger, S. (1966): “Lemezék és héjak elmélete”. Műszaki Könyvkiadó, Budapest,
- Toksoy, T. and Aktan, A.E. (1994): “Bridge-condition Assessment by Modal Flexibility”. *Experimental Mechanics*, 34, 271–278.
- Touze, C., Camier, C., Favraud, G., and Thomas, O. (2008): „Effect of Imperfections and Damping on the Type of Nonlinearity of Circular Plates and Shallow Spherical Shells”. *Mathematical Problems in Engineering*. Vol. 2008, pp. 19, Hindawi Publishing Corporation.
- Watson, G. N. (1948): “Theory of Bessel function”. Cambridge.

- West, W.M. (1984) "Illustration of the use of Modal Assurance Criterion to detect structural changes in an orbit test specimen." Proceedings of Air Force Conference on Aircraft Structural Integrity, pp. 1-6.
- Wojnarowski, M. E., Stiansen, S. G., and Reddy, N. E., (1977): "Structural integrity evaluation of a fixed platform using vibration criteria", in Proc. 9th Annual Offshore Tech. Conf, pp. 247-256.
- Wu, Z., Ghosh, K., Qing, X., Karbhari, V., Chang, F. (2006): "Structural health monitoring of composite repair patches in bridge rehabilitation". Proceedings of SPIE - The International Society for Optical Engineering. 6174 II, art. no. 617423
- Yuen, M.,(1985): "A numerical study of the eigenparameters of a damaged cantilever." Journal of Sound and Vibration, 103(3): 301-310.
- Yun, C-B., Yi, J. H., Bahng, E. Y., (2001): "Joint damage assessment of framed structures using a neural networks technique." Engineering Structures, 23, 425-435.
- Zimmerman, D.C. and Smith, S.W. (1992): "Model Refinement and Damage Location for Intelligent Structures". Intelligent Structural Systems, H.S. Tzou and G.L. Anderson, Eds., Kluwer Academic Publishers, 403-452.