

FORGÁSSZIMMETRIKUS CSEBISEV-FÉLE FELÜLETEK

*Hegedűs István**

RÖVID KIVONAT

A tanulmány adott sugarú peremkörökhöz illesztett Csebisev-féle háló megfeszítésével kialakuló egyensúlyi alakok numerikus vizsgálatával foglalkozik. A háló alakváltozása it olyan hiányos merevségű felület véges alakváltozásaival közelíti, amely a deformálódó háló egymást keresztező szálainak irányában nyújthatatlan, de a szálak metszészögének a megváltozásával szemben nem mutat ellenállást. Az eredmények közt bemutatja a kosárlabda-háló alakjának vizsgálatát.

1. BEVEZETÉS

Ebben a tanulmányban a peremkörökhöz rögzített és forgástengelyük irányában húzóerővel megfeszített, forgásszimmetrikus Csebisev-féle hálók egyensúlyi alakjának meghatározásával foglalkozunk. Kitérünk az önsúlyával terhelt háló vizsgálatára is. A tanulmány részét képezi egy vizsgálat-sorozatnak, amelyet a szerző az OTKA támogatásával a T 32056 és a T 031931 számú program keretében végzett.

A Csebisev-féle hálók [Kuznetsov 1991] olyan hálófelületek, amelyeket két, - általában nyújthatatlannak és egyenlő osztásközűnek tekintett - szálsereg alkot. A kereszteződő szálak egymáshoz vannak kapcsolva, de a keresztezés szöge szabadon változhat. A végtelen sűrű Csebisev-féle hálókat Csebisev-féle felületeknek nevezzük. A felületben csak olyan feszültségek léphetnek fel, amelyek a megfeszülő szálakban működő húzóerők fajlagos értékeiként származtathatók, emiatt a felület egyensúlyi alakját csak a véges alakváltozások elméletével követhető nagy alakváltozásokkal éri el. Ilyen alakváltozásokat vizsgálunk az alábbiakban.

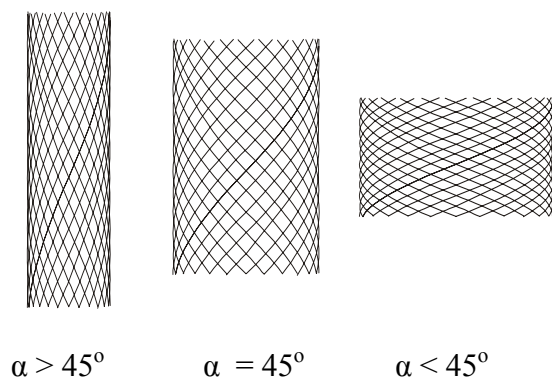
2. HENGERRÉ HAJLÍTOTT CSEBISEV-FÉLE HÁLÓ

Induljunk ki egy négyzethálóból, amelyet egy a_0 sugarú, l_0 hosszúságú hengerre fektetünk, úgy, hogy a szálirányok a henger gyűrűkörével 45° -os szöget zárnak be. Ennek a hengernek a sugarát és hosszát a következő a_α és l_α összetartozó értékek szerint tudjuk változtatni a szálak nyúlásmentességét és szimmetrikus helyzetét feltételezve:

$$a_\alpha = a_0 \cos \alpha / \cos 45^\circ, \quad l_\alpha = l_0 \sin \alpha / \sin 45^\circ,$$

ahol α a szálaknak a gyűrűkörrel bezárt szögét jelöli.

* okl. mérnök, a műsz. tud. doktora, egyetemi tanár, BME Hidak és Szerkezetek Tanszéke



1. ábra

Ha $\alpha > 45^\circ$, a henger sugara a kiinduló állapothoz képest csökken, a hossza pedig növekszik, $\alpha < 45^\circ$ esetén fordítva. A legnagyobb sugár $\alpha = 0$ értékéhez tartozik

$$a_{max} = a_0 / \cos 45^\circ,$$

amikor a magasság 0-vá, a szálak egymással párhuzamossá válnak. A henger legnagyobb magassága $\alpha = 90^\circ$ értékénél adódik, amikor a sugár válik 0-vá:

$$l_{max} = l_0 / \sin 45^\circ.$$

A valóságban a két szélsőséges állapot nem tud kialakulni, de laza szövésű textíliáknál, ill. fonott hálónál a közbenső állapotok a fentiek szerint alakulnak.

A véges osztásközű négyzet- ill. rombuszháló megfigyelt viselkedésében nincs meghatározó szerepe az osztásköz méretének. Az osztásköz méretét minden határon túl csökkentve, határátmenettel olyan hiányos merevségű membránfelületet értelmezhetünk, ami anyagi ellenállás nélkül képes a fenti alakváltozásra. Az ilyen viselkedésű membránfelületet a továbbiakban a rövidség kedvéért Csebisev-féle hengernek nevezük.

3. PEREMKÖRÖKRE RÖGZÍTETT CSEBISEV-FÉLE HENGER

Milyen alakú lesz a szálirányban nyújthatatlan Csebisev-féle henger, ha a peremeit egy a_1 és egy a_2 sugarú koncentrikus körhöz rögzítjük, majd ezeket egymástól addig távolítjuk, amíg a felület kifeszül?

A kifeszülő infinitezimális háló alakja a feladat jellegéből következően forgásfelület lesz. Írja le a felület alakját a forgástengelyhez illesztett henger-koordinátarendszer egy z, r koordinátasíkban fekvő meridián-görbe $r(z)$ egyenlete.

Az alak meghatározásának a kulcsát az a felismerés adja, hogy a kifeszülő infinitezimális rombuszhálózat szálirányainak szögét mindenütt r értéke határozza meg, függetlenül attól, hogy a felület β -val jelölt meridián-szöge mekkora érték. Az r és az α közötti összefüggés tehát tetszőleges meridián esetén is ugyanaz, mint az imént vizsgált különböző sugarú hengereknél:

$$\cos \alpha = r/a, \tag{1}$$

ahol a a 0 magasságú henger sugarát jelöli.

A meridián-irányra szimmetrikus szálelrendezés miatt a hálót alkotó szálak megfeszülésekor a hiányos merevségű felületben csak meridián- és gyűrűirányú normál-metszeterők, N_ϕ és N_θ lépnek fel. Ezek arányát a szálirányok meghatározzák. Az arányt egyszerűen megadhatjuk, ha két-két meridián- és gyűrűirányú vonallal olyan téglalap alakú elemet metszünk ki a felületből, amelynek átlói a szálirányokkal párhuzamosak. A téglalap-oldalak által átvágott elemi szálakban működő húzóerőt meridián- és gyűrűirányú komponenseire bontva, majd az oldalak mentén működő húzóerő-komponenseket az oldalhosszak szerint fajlagosítva azt kapjuk, hogy α szálirány esetén:

$$N_\phi / N_\theta = \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (2)$$

Az N_ϕ és N_θ membránérők aránya (1) alapján r függvényeként is megadható:

$$N_\phi / N_\theta = \frac{a^2 - r^2}{r^2} \quad (3)$$

Az $r(z)$ függvénynek olyan felületalakot kell leírnia, amelyben a fenti arány szerinti membránérők eleget tesznek a terheletlen membránfelületre vonatkozó

$$\frac{N_\phi}{R_\phi} + \frac{N_\theta}{R_\theta} = 0 \quad (4)$$

normális irányú egyensúlyi egyenletnek [Hegedűs 1999]. Az egyenletben R_ϕ és R_θ a forgásfelület meridián- és gyűrűirányú főgörbületi sugarait jelöli. (Zérustól különböző felületi teher esetén az egyenlet jobb oldalán $-p_v$ áll, ahol p_v a felületi tehernek a felületi normális irányú összetevője.)

A (3) és a (4) egyenletet közvetlenül felhasználhatjuk a keresett $r(z)$ függvényre vonatkozó matematikai feltétel felírására, oly módon, hogy a

$$\frac{R_\theta}{R_\phi} + \frac{N_\theta}{N_\phi} = 0 \quad (4.a)$$

alakúra átrendezett egyenletben szereplő minden mennyiséget $r(z)$, és deriváltjaik segítségével fejezünk ki. A főgörbületeire vonatkozó differenciálgeometriai összefüggések felhasználásával, z szerinti deriváltakat z lábindexszel azonosítva:

$$R_\theta = -r (1 + r_z^2)^{1/2}, \quad (5.a)$$

$$\frac{1}{R_\phi} = \frac{r_{zz}}{(1 + r_z^2)^{3/2}}. \quad (5.b)$$

Ezekkel és a (3) összefüggéssel a (4.a) egyenletbe belépve a következőt kapjuk:

$$\frac{r^2}{a^2 - r^2} - \frac{r r_{zz}}{1 + r_z^2} = 0. \quad (6)$$

Vezessük be $r(z)$ helyett a

$$\zeta = z/a \quad (7.a)$$

dimenziótlan változótól függő

$$\rho = r/a \quad (7.b)$$

függvényt, és jelöljük ennek deriváltjait ζ lábindexek. A $\rho(\zeta)$ függvényre vonatkozó, (6) egyenlettel azonos tartalmú

$$\frac{\rho^2}{1-\rho^2} - \frac{\rho\rho_{\zeta\zeta}}{1+\rho_{\zeta}^2} = 0 \quad (8)$$

egyenletet ρ_{ζ}/ρ -val megszorozva az egyenlet mindkét tagja ζ szerint közvetlenül integrálható:

$$\frac{\rho\rho_{\zeta}}{1-\rho^2} - \frac{\rho_{\zeta}\rho_{\zeta\zeta}}{1+\rho_{\zeta}^2} = -\frac{1}{2} \frac{d}{d\zeta} [\ln(1-\rho^2) + \ln(1+\rho_{\zeta}^2)] = 0. \quad (9)$$

Az integrálást elvégezve azt kapjuk, hogy

$$(1-\rho^2)(1+\rho_{\zeta}^2) = C^2 \quad (10)$$

ahol C tetszőlegesen választható integrációs konstans. Ezt az eredményt felhasználva a $\rho(\zeta)$ függvényre vonatkozó differenciálegyenletet a következőképp alakíthatjuk át:

$$\frac{\rho_{\zeta\zeta}}{\rho(1+\rho_{\zeta}^2)^2} = \frac{1}{C^2} \quad (11)$$

Ennek a differenciálegyenletnek a megoldásfüggvényei olyan felületeteket írnak le, amelyek Gauss-féle szorzatgörbülete konstans $-(Ca)^2$ érték. Ugyancsak közvetlen geometriai tartalom adható a (10) összefüggésnek. Eszerint C meghatározza α és a β meridiánszög kapcsolatát:

$$\sin^2\alpha / \cos^2\beta = C^2 \quad (10.a)$$

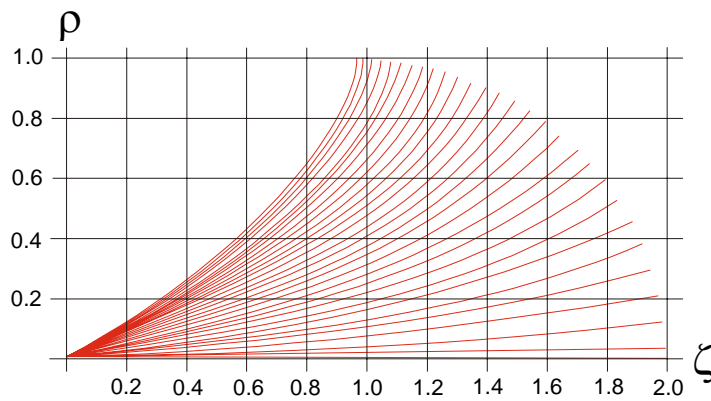
A (11) másodrendű nemlineáris differenciálegyenlet analitikus úton történő megoldására a vonatkozó szakirodalom szerint (Kamke 6.56) az ún. elliptikus integrálok alkalmazásával van lehetőség.

A (8) differenciálegyenlet struktúrája lehetőséget ad arra, hogy a probléma numerikus megoldását kezdetiérték-feladat formájában vizsgáljuk. A kezdőpontban szabadon föl lehet venni a ρ és a ρ_{ζ} értékét, amelyekhez a (8) egyenlet alapján kiszámítható $\rho_{\zeta\zeta}$ kezdeti értéke is. A kezdeti értékek alapján egy megfelelően választott lépésnyi távolságban becslést adhatunk a ρ és a ρ_{ζ} értékére, ugyanitt a becsült értékek felhasználásával kiszámítható $\rho_{\zeta\zeta}$ becsült értéke is, azaz lehetőség van egy Euler-féle iterációra. Az iteráció pontossága megfelelően választott prediktor-korrektor módszerrel fokozható. Az eljárásban fokozatos közelítéssel kell azt a kezdeti érték-párt felvenni, amellyel a megoldás az ellentett oldali peremfeltételt teljesíti.

Az alábbi ábrákat olyan Euler-féle iterációval számítottuk, amelyben az összetartozó ρ és a ζ dimenziótlan koordinátákat leíró függvények független változójának a változó dőlésű szálak mentén mért hosszúság a -val osztott értékét választottuk. Ez azzal az előnnyel jár, hogy a szálak mentén egyenletes lépésköz alkalmazásával végzett iteráció kevésbé érzékeny a $\rho = 1$ -hez, ill. $\rho = 0$ -hoz közeli értékek esetén jelentkező numerikus

bizonytalanságokra, továbbá az iteráció utolsó lépése éppen a felvett szálhosszúságú kifeszített forgásfelület ellentett oldali peremkörének a dimenziótlan koordinátáit adja meg.

Az első ábra olyan $\rho(\zeta)$ meridián-görbéket mutat, amelyek mindegyike a $\rho_1 = \rho(0) = 0.01$ pontból indul, a szálaknak hosszának $\lambda = l/a$ szerint dimenziótlanított értéke $\lambda = 2.0$.

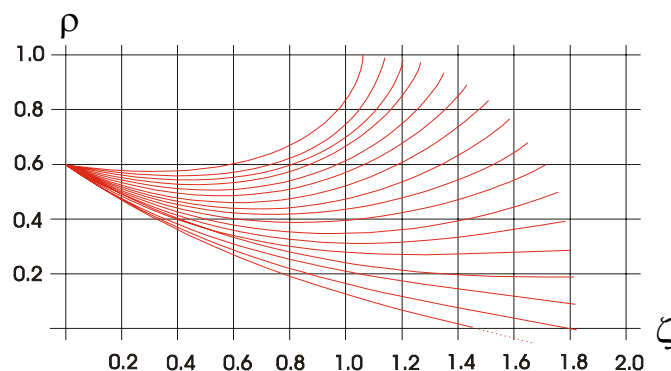


2. ábra

Az ábra szerint a kifeszített háló hossza a ρ_2 sugár növekedtével csökken. A csökkenés jelentős mértékű lehet, a legkisebb dimenziótlanított magasság kb. 0.95.

Ez a rövidülés egyrészt azzal magyarázható, hogy minél nagyobb r értéke, annál nagyobb szögben metszik a szálak a meridiánt, másrészt azzal, hogy minél nagyobb a ρ_2 sugár, annál erősebben eltér a meridián-irány a forgástengelytől, így összességében a szálak futása egyre erősebben eltér a legrövidebb úttól.

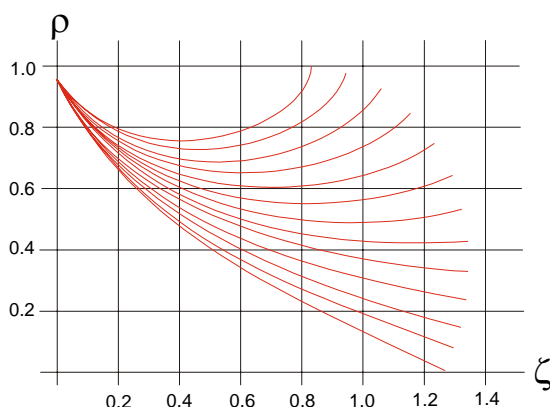
Érdekes ellentmondásra mutat a kifeszített hálózat teljes magasságával kapcsolatban a 3. ábrán látható görbesereg, amelynél a kezdőpont $\rho(0) = 0.6$, $\lambda = 2.0$. Az ábra ugyanis azt mutatja, hogy a legnagyobb kifeszített magasság - a várakozásnak megfelelően - valóban lecsökkent az előző esethez képest, viszont a legkisebb kifeszített magasság valamelyest nagyobb lett, azaz nincs olyan monoton kapcsolat a teljes magasság és a peremkör-sugarak közt, hogy bármelyik állapotban bármelyik peremkör sugarának a növelése a teljes magasság csökkenését eredményezné.



3. ábra

Ennek az a magyarázata, hogy a rövidülést nemcsak az okozza, hogy a szálak iránya eltér a meridián irányától, hanem az is, hogy a meridián változó nagyságú szöget zár be a forgástengellyel, és különböző peremsugár-pároknál e két rövidülés teljes hatása eltérő. A 3. ábráról leolvasható másik említésre méltó tulajdonság, hogy a meridián-görbék egy része visszahajló, a másik része pedig (az ábrán, vagy a görbe meghosszabításában) elmetszi a ζ tengelyt. A két görbesereget olyan meridián-görbe választja el, amelynek aszimptotája a ζ tengely. A visszahajló meridiánok a görbe legalsó pontjában felvett tükörtengelyre szimmetrikusak.

A rövidülés két forrásának egymásra hatása jól megfigyelhető 4. ábra görbéin. Ezen az ábrán $\rho(0) = 0.95$, $\lambda = 2.0$.



4. ábra

Az ábra azt mutatja, hogy ρ_2 kicsiny értékeinél a teljes rövidülésben jelentősebb a meridián ferdeségének a hatása, ezért ρ_2 növekedéséhez egy ideig a teljes magasság növekedése tartozik, ρ_2 nagyobb értékeinél viszont egyre inkább a szálirány és a meridián-irány eltérésének a hatása válik meghatározóvá.

3.1. Egy különleges eset

Hajlítsuk az előző szakaszban vizsgált $a = 1$ maximális sugarú Csebisev-féle hengert egy $a = 1$ maximális sugarú álgömb felületre.

Az álgömb olyan forgásfelület, amelynek a Gauss-féle szorzatgörbülete a gömbéhez hasonlóan minden pontban ugyanaz az érték, de - a gömbtől eltérően - ez az érték negatív. A zérus Gauss-féle görbületű Csebisev-féle hengernek az álgömbre való hajlítását a hiányos merevség teszi lehetővé.

Az álgömb meridián-görbéje ún. *traktrix*-vonal, vagy vontatási görbe [Bronstein-Szemengyajev 1980]. Ilyen görbét egy súrlódó pont pályájaként kapunk, ha azt egy egyenes mentén haladva állandó hosszúságú kötéllal vontatjuk. A vontatás kiinduló helyzetének azt tekinthetjük, amikor a kötél a vontatási egyenesre merőleges helyzetben van. Ebben a helyzetben a súrlódó pont a vontatási vonaltól legtávolabbi helyén, a vontató kötél hosszával azonos távolságban fekszik. A kiinduló helyzetben a vontatást jobbra is, balra is megkezdhetjük, ennek megfelelően a teljes vontatási görbe két szimmetrikus ágból tevődik össze.

A láncvonal geometriai tulajdonságai alapján meg lehet mutatni, hogy a vontatási görbe egy láncvonal csúcsától lefejtett evolvens (5. ábra). Az álgömb felület leírását ennek az értelmezésnek a felhasználásával célszerű elvégezni.

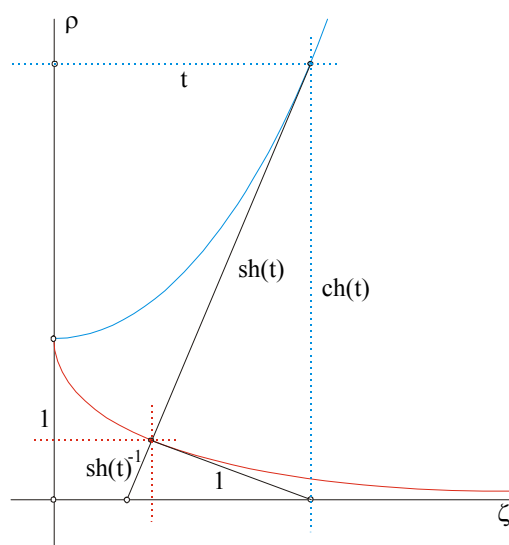
Ha az eddig használt jelöléseknél maradván ρ -val jelöljük a forgáskör sugarát, ζ -val a forgástengely-irányú koordinátát, a vontatási görbe paraméteres egyenlete a következő:

$$\rho = (\text{cht})^{-1}, \quad \zeta = t - \text{th}t .$$

A vontatási görbe érintőjének iránytényezője és a görbe megforgatásával adódó forgásfelület főgörbületi sugarai egyszerűen leolvashatók az 5. ábrából:

$$\rho_{\zeta} = -1/\text{sh}t ,$$

$$R_{\varphi} = \text{sh}t, \quad R_{\theta} = -1/\text{sh}t .$$



5. ábra

Az $a = 1$ maximális sugarú álgömb-felülethez illesztett $a = 1$ maximális sugarú Csebisev-féle henger szálainak iránya a $\zeta = 0$ helyen fekvő kör mentén éppen a gyűrű-irány lesz, azaz $\alpha = 0$. Ez a szög a forgásfelület itteni β meridián-szögének a pótszögé-ként is felfogható. Érdekesebb, hogy az α szögnek és a meridián-szögnek ez a kapcsolata a felület minden pontján, tehát $\zeta \neq 0$ esetben is fennáll. Teljesül tehát a

$$\frac{\cos \beta}{\sin \alpha} = 1$$

egyenlőség.

Vizsgáljuk most, hogy milyen p_v normálirányú "stabilizáló" felületi teher mellett lehet az álgömbhöz simított Csebisev-féle hengert az előző szakaszban vizsgált membrán feszültségállapotba hozni. Helyettesítsük be ezért a felületfüggvény megfelelő adatainak a t paraméterrel megadott alakját a hiányos merevségű forgásfelület membrán-egyensúlyának

$$N_{\varphi} \left[\frac{1}{R_{\varphi}} + \operatorname{ctg}^2 \alpha \frac{1}{R_{\theta}} \right] = -p_v$$

formára rendezett egyenletébe.

A meridián-szög és α kapcsolata alapján:

$$\operatorname{ctg}^2 \alpha = \rho_{\zeta}^2 = 1/\operatorname{sh}^2 t,$$

ezzel a kifejezéssel, továbbá R_{φ} és R_{θ} sugarak t paraméterrel meghatározott értékével belépve az egyenletbe azt találjuk, hogy a kapcsos zárójelen belüli összeg nullává válik, vagyis az álgömbhöz simított Csebisev-féle henger külső felületi terhek alkalmazása nélkül membrán-feszültségállapotba hozható.

A vontatási görbe tehát analitikus függvények alkalmazásával megadható tagja az előző szakaszban numerikus módszerrel előállított görbeseregnek. Mivel a vontatási görbe aszimptotikusan simul a vontatás vonalához, ez az a meridián-vonal, amely a görbesereg visszahajló, ill. a ζ tengelyt elmetsző görbéit elválasztja egymástól.

4. MILYEN ALAKJA VAN A KOSÁRLABDA-HÁLÓNAK? (ÖNSÚLYÁVAL TERHELT CSEBISEV-FÉLE HENGER)

Az előző szakaszokban levezetett összefüggéseket egyszerűen ki lehet egészíteni olyan eset vizsgálatára, amikor a kifeszülő Csebisev-féle hengeren felületi teher is működik. Ez a kiegészítés lehetőséget ad egy nevezetes alakmeghatározási probléma közeletítő vizsgálatára: milyen alakja van a kosárlabda gyűrűjére feszített hálónak?

Az NBA előírásai szerint (NBA Official Rules No 1: Court dimensions and Equipments) a kosárgyűrű belső átmérője 18 hüvelyk (kb. 45.8 cm), a gyűrűre erősített fehér színű, 30-120 elemi szálát tartalmazó zsinemből font kosárháló 15-18 hüvelyk (kb. 38-46 cm) hosszúságú, és biztosan gátolnia kell a 9.2~9.5 hüvelyk kb. (23,5~24 cm) átmérőjű labdát az áthaladásában. Az NBA mérkőzéseit befogadó stadionokban olyan kosárhálót alkalmaznak, amely gyűrűirányban számolva 12, a szálak futásirányában számolva 7 hálószelemből áll, a háló lyukbősége 1.75×1.75 inch (kb. 4.5×4.5 cm). A hálót az osztásköz kb. háromszorosának megfelelő hosszúságú V alakú rögzítőfülek kapcsolják a gyűrűhöz. A nemzetközi, ill. európai kosárlabda-szabályzatok (FIBA, EU Official Rules stb.) az NBA előírásaiban szereplő értékekhez közeli metrikus értékeket írnak elő.



6. ábra

Bár az elsorolt adatokból az derül ki, hogy a kosárháló viszonylag ritka osztású, és az sem zárható ki, hogy a háló alakját a hálót alkotó fonalak hajlítási merevsége is befolyásolja, feltesszük, hogy a hálót az előző szakaszokban Csebisev-féle hengernek nevezett hiányos merevségű membránfelülettel helyettesítve legalább jellegükben a valósághoz közelítő eredményeket fogunk kapni.

A háló alapadataiból a helyettesítő Csebisev-féle henger adataira a következő metrikus értékeket számíthatjuk:

$$a = 2 \times 12 \times 4.5 / 2\pi = 17.19 \text{ cm}$$

$$l = (7+1) \times 4.5 = 36.0 \text{ cm}$$

Ezekből az adatokból egyrészt azt állapíthatjuk meg, hogy a kb. 12.0 cm sugarú labda valóban átférhet a hálón, másrészt viszont azt, hogy a háló csak úgy függeszthető fel a 22.9 cm sugarú gyűrűre, ha az osztásköz hosszát tetemesen meghaladó hosszúságú rögzítő füleket alkalmazunk, a magassága is csak akkor felel meg az NBA előírásainak, ha hozzászámítjuk azt a többletet is, amelyet a sugárirányú követelmény teljesítéséhez minimálisan szükségesnél hosszabb rögzítő fülek alkalmazásából adódhat.

Foglalkozunk most az önsúlya által kifeszített Csebisev-féle henger megváltozott alakját meghatározó differenciálegyenlettel. Ez a differenciálegyenlet voltaképpen csak abban különbözik a hiányos membránfelület egyensúlyának az előző szakaszokban alkalmazott differenciálegyenletétől, hogy a felületi teher értéke nem zérus, hanem az önsúlynak a felületi normális irányába eső komponense.

Amíg a felületi teher értéke zérus volt, N_ϕ is kiejthető volt a differenciálegyenletből. Zérustól különböző felületi teher esetén viszont ez nem tehető meg, sőt, figyelembe kell vennünk N_ϕ -nek a szálak mentén bekövetkező változását is.

Ha G -vel jelöljük a teljes háló súlyát, N_ϕ -re az alábbi képletet alkalmazhatjuk:

$$N_\phi = \frac{G(l-s)}{l} \frac{1}{2\pi r \sin \beta},$$

ahol s a szálak mentén mért hosszúság, $r = a\rho$ a gyűrűkör sugara, β pedig a meridián-szöveget. A képletben szereplő szinuszt kifejezhetjük ρ_ζ segítségével:

$$\frac{1}{\sin \beta} = \sqrt{1 + \rho_\zeta^2}$$

Ezzel a kifejezéssel és r képletével az N_ϕ -re vonatkozó egyenletbe belépve a következőt kapjuk:

$$N_\phi = \frac{G}{2a\pi} (l-s) \frac{\sqrt{1 + \rho_\zeta^2}}{\rho}$$

Az önsúlyból származó felületi teher képletét két lépésben határozzuk meg: először G , l , és r segítségével α függvényében kifejezzük az önsúlynak a felületegységre jutó g értékét, majd ennek a felületre merőleges p_v komponensét vesszük:

$$g = \frac{G}{2\pi a l \cos \alpha \sin \alpha} = \frac{G}{2\pi a l} \frac{1}{\rho \sqrt{1 - \rho^2}},$$

$$p_v = g \cos \beta = -\frac{G}{2\pi a l} \frac{1}{\rho \sqrt{1 - \rho^2}} \frac{\rho_\zeta}{\sqrt{1 + \rho_\zeta^2}}.$$

A p_v képletében szereplő negatív jelre azért van szükség, mert a forgáshéjak vizsgálatában szokásos értelmezés szerint p_v akkor pozitív, ha a pozitívnak tekintett görbület görbületi középpontjának irányába mutat (Hegedűs 1999).

A meridián-metszeterő és a felületi teher képletét a hiányos merevségű membrán egyensúlyi egyenletébe behelyettesítve a következőt kapjuk:

$$\frac{G}{2\pi a l} (l-s) \frac{\sqrt{1 + \rho_\zeta^2}}{a \rho} \left[\frac{\rho_{\zeta\zeta}}{(1 + \rho_\zeta^2)^{3/2}} - \frac{\rho^2}{1 - \rho^2} \frac{1}{\rho \sqrt{1 + \rho_\zeta^2}} \right] = \frac{G}{2\pi a l} \frac{\rho_\zeta}{\rho \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{1 + \rho_\zeta^2}}$$

A fenti egyenletből a közös szorzótényezők kiejtése és átrendezés után az alábbi differenciálegyenletet kapjuk:

$$\frac{l-s}{a} \left[\rho_{\zeta\zeta} - \frac{\rho(1 + \rho_\zeta^2)}{1 - \rho^2} \right] = \frac{\rho_\zeta \sqrt{1 + \rho_\zeta^2}}{\sqrt{1 - \rho^2}}.$$

A háló alakjának a vizsgálatát numerikus módszerrel kell végeznünk, mert ez a differenciálegyenlet összetett ahhoz, hogy a szakirodalomban analitikus megoldást találhatnánk. Az iterációval kiinduló pontja az $s = l$ ívhossz-koordinátájú pont. A kezdeti értékek felvételéhez az alábbi megfontolásokat tesszük.

Vegyük fel a szabad peremen $\rho(l)$ értékét. A kezdőponthoz tartozó kör a hiányos merevségű felület szabad pereme, ahol N_φ értéke zérus. A kötött metszeterő-arányok miatt ugyanitt N_θ -nak is zérusnak kell lennie, ebből az következik, hogy a felületre merőleges p_v teherkomponens sem különbözhet zérustól. Ez csak akkor lehetséges, ha a felületi normális merőleges a teher irányára. Ebből a megfontolásból az következik, hogy a szabad peremen $\rho_\zeta(l) = 0$.

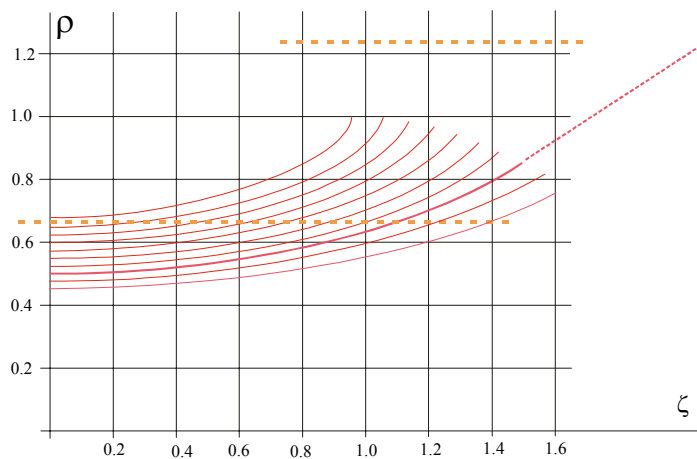
A $\rho_{\zeta\zeta}(l)$ kezdeti érték felvételéhez vizsgáljuk a felület egyensúlyát a szabad peremtől kicsiny Δs lépésnyi távolságban. $N_\varphi(l-\Delta s)$ értéke közelítőleg $g\Delta s$, $N_\theta(l-\Delta s)$ értéke pedig - elhanyagolva ρ -nak a Δs lépéshez tartozó kicsiny megváltozását - $g\Delta s \rho(l)^2 [1 - \rho(l)^2]$. A felületi teher $p_v(l-\Delta s)$ értékét úgy számíthatjuk ki, hogy figyelembe vesszük a meridiánnak a Δs lépéshez tartozó $-\rho_{\zeta\zeta}(l)\Delta s$ elferdülését. Így azt kapjuk, hogy $p_v(l-\Delta s) = -[g\rho_{\zeta\zeta}(l)\Delta s]$. Ha közelítésként elhanyagoljuk $\rho_{\zeta\zeta}$ -nek a Δs lépésközhez tartozó kicsiny megváltozását, a membránegyensúly alapján fenti mennyiségek közt a következő összefüggés írható fel:

$$g\Delta s \rho_{\zeta\zeta}(l) - g\Delta s \rho(l)^2 [1 - \rho(l)^2] / \rho(l) = -g\rho_{\zeta\zeta}(l)\Delta s,$$

amelyből $\rho_{\zeta\zeta}$ kezdő értékére az alábbi képlet adódik:

$$\rho_{\zeta\zeta}(l) = \rho(l) [1 - \rho(l)^2] / 2.$$

Miután a ρ függvény és deriváltjainak kezdeti értékét a fenti megfontolással fel tudtuk venni, a szabad peremről elindíthatunk egy iterációt a meridián-görbe meghatározására.



7. ábra

A 7. ábrán az iteráció alkalmazásával előállított meridián-görbék láthatók. Az ábrázolás egyszerűsítése érdekében a szabad perem helyét minden meridián esetében a $\zeta = 0$ helyen vettük fel, így a diagramon ζ a szabad peremtől fölfelé mért függőleges koordináta dimenziótlan értékét jelöli.

A görbék számításánál kicsit eltértünk az NBA szabályzat szerinti háló a/l arányától: az ábrázolt meridián-görbék esetén ez az érték 2.0, ami kb. 5%-kal kisebb a szabályzati értékek hányadosnál. A diagramba berajzolt két vízszintes szaggatott vonal a gyűrű és a kosárlabda sugarának a -val elosztott értékét jelöli, a függőleges szaggatott vonal a háló megkövetelt magasság a -val elosztott értékét jelzi. A $\rho = 0.5$ kezdőértékhez tartozó, megvastagított görbe meghosszabbításában fekvő szaggatott egyenes vonal hossza a háló felfüggesztésére szolgáló függesztő fülek szükséges hosszát mutatja. A számítás szerint ennél nagyobb kezdőértékkel a háló nem teljesítheti a méretekre vonatkozó NBA előírást.

A számítási eredmények elfogadható egyezést mutatnak a 6. ábrán mellékelt fotókkal.

HIVATKOZÁSOK

- [1] Bronstejn, I.N. - Szemengyajev, K.I.: *Matematikai Zsebkönyv*. 4. kiadás. Műszaki Könyvkiadó, Budapest, 1980.
- [2] Hegedűs I.: *Héjszerkezetek*. Műegyetemi Kiadó 1999.
- [3] Kuznetsov, E.N.: *Underconstrained Structural Systems*. Springer-Verlag, New York, Heidelberg etc. 1991.

- [4] Kamke, E: *Differentialgleichungen Lösungsmethoden und Lösungen*. I. Gewöhnliche Differentialgleichungen. 5. unveränderte Auflage. Akademische Verlagsgesellschaft, Geest & Portig K.-G. Leipzig, 1956.
- [5] NBA Official Rules: http://www.nba.com/analysis/rules_index.html